Devoir Maison n° 3 pour le 3 octobre

Notations et objectifs.

Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (resp. des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A . On note ${}^t A$ la transposée d'une matrice A .

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A , $\text{Tr}(A)$ la trace de A ; on note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_{\lambda}(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$. Soit I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (ST > 0) lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

Dans la première partie, on démontre une caractérisation géométrique d'une classe de matrices vérifiant la propriété (ST > 0). Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés sur les éléments propres des matrices vérifiant la propriété (ST > 0).

Partie 1. Un exemple géométrique

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Étant donné un nombre complexe z , on note $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, c'est-à-dire le point de coordonnées (x, y) . On considère le triangle du plan complexe dont les sommets sont les points $P(1)$, $Q(j)$, $R(j^2)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note T l'intérieur de ce triangle, bords non compris. Soit D le disque ouvert du plan complexe de centre O (origine du repère) et de rayon 1, c'est à dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$.

- Dessiner les ensembles T et D sur un même dessin. En notant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan complexe, donner les équations cartésiennes des côtés du triangle PQR . Déterminer les équations cartésiennes des droites (PQ) , (QR) et (RP) . Montrer qu'un point $M(x + iy)$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités :

$$2x + 1 > 0, \quad x - \sqrt{3}y - 1 < 0, \quad x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

- Dans cette question, on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété (ST > 0).

- Montrer que 1 est valeur propre de A .

Dans la suite de la question 2, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts λ et $\bar{\lambda}$, avec $0 < |\lambda| < 1$. On note $\lambda = a + ib$.

- Exprimer $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$ en fonction de λ et $\bar{\lambda}$, puis en fonction de a et b .

- Montrer les inégalités $\text{Tr}(A) > 0$ et $\text{Tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $(\text{Tr}(A))^2 < 3\text{Tr}(A^2)$

- Déduire des deux questions précédentes les inégalités $2a + 1 > 0$ et $(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$.

- Déduire des questions précédentes que le point $M(\lambda)$ appartient à T (on pourra considérer les régions de D délimitées par les côtés du triangle PQR).

- Dans cette question, on note $\lambda = re^{i\theta}$ avec $0 < r < 1$ et $0 < \theta < \pi$ et on suppose que le point $M(\lambda)$ appartient à T . On note

$$\alpha = \frac{1 + 2r \cos(\theta)}{3}, \quad \beta = \frac{1 + 2r \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3}, \quad \gamma = \frac{1 - 2r \cos(\theta + \frac{\pi}{3})}{3}$$

- Montrer les égalités $\alpha = \frac{1+\lambda+\bar{\lambda}}{3}$, $\beta = \frac{1+j\lambda+j^2\bar{\lambda}}{3}$, $\gamma = \frac{1+j^2\lambda+j\bar{\lambda}}{3}$.

- Dans la suite de cette question, on note A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Montrer que A vérifie la propriété (ST > 0).

- Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3 . Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J .

- Exprimer la matrice A en fonction de I_3 , J et J^2 . Déterminer un polynôme P de degré ≤ 2 tel que $A = P(J)$. En déduire que 1, λ et $\bar{\lambda}$ sont les valeurs propres de A .

Partie 2. Localisation des valeurs propres

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété (ST > 0).

1. Soit U le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A .

2. **Précision sur $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.**

(a) Soient une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Justifier l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

(b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini en 2.(a). En déduire $|\lambda| \leq 1$.

(c) On suppose que $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(\theta) = 1$, en déduire λ .

3. **Dimension de $E_1(A)$.**

(a) Montrer que $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^{\top})$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de $A^{\top} - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1(A^{\top})$ ont même dimension.

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que $A^{\top}V = V$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a l'inégalité $|v_i| \leq \sum_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} a_{j,i} |v_j|$. En calculant $\sum_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que $A^{\top}|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $|v_i| > 0$.

(c) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1(A^{\top})$. En considérant

la matrice $X - \frac{x_1}{y_1} Y$, déterminer la dimension de $E_1(A^{\top})$. Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui

engendre $E_1(A^{\top})$, tel que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.
Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$.

(d) **Bilan des propriétés spectrales de A et de $A^{\top}$.**

Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de $A^{\top}$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

4. [5/2] On considère l'application N définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ par $\forall X$, $N(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i|$, où $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées de X et $\omega_1, \dots, \omega_n$ celle de la matrice Ω .

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leq N(X)$. Retrouver le résultat de 2.(b) : pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leq 1$.

5. **Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A .**

À l'aide la matrice colonne Ω précédente, on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\Phi(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$. On note $\ker(\Phi)$ le noyau de Φ .

(a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

(b) Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$.

(c) Soit $X \in E_{\lambda}(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \ker(\Phi)$.

(d) En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de la matrice A .