Devoir Maison n° 4
pour le 10 octobre
Représentation matricielle $\mathrm{A}e^{\mathrm{A}}$

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à cœfficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice* p si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $\mathrm{N}^p = 0$.

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(\mathrm{A})$ ou e^{A}, la matrice $e^{\mathrm{A}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$. On admet que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, on a $e^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = e^{\mathrm{A}}e^{\mathrm{B}}$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre* n associé au nombre complexe λ, la matrice

$$\mathrm{J}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à cœfficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1) Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $\omega = re^{i\alpha}$ et $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = \omega$ équivalente au système:

$$\begin{cases} \mathrm{R}e^{\mathrm{R}\cos\theta} = r \\ \mathrm{R}\sin\theta = \alpha - \theta \end{cases} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $[0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule:

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin\theta} e^{\left((\alpha-\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

2) Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé.

Soit $\mathrm{D} = \{\mathrm{R}e^{i\theta}; \mathrm{R} > 0; 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

3) Déduire de ce qui précède que g est surjective.

B. Représentation $\mathrm{A}e^{\mathrm{A}}$ d'un bloc de Jordan

Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4) Montrer qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{N}^{n-1}\mathrm{X} \neq 0$ et que la famille $(\mathrm{X}, \mathrm{NX}, ..., \mathrm{N}^{n-1}\mathrm{X})$ est libre.

5) En déduire que N est semblable à $\mathrm{J}_n(0)$.

6) Montrer que $e^{\mathrm{J}_n(0)}$ est inversible et que $\mathrm{J}_n(0)e^{\mathrm{J}_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) Montrer que si $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $\mathrm{P}e^{\mathrm{J}_n(0)}\mathrm{P}^{-1} = e^{\mathrm{P}\mathrm{J}_n(0)\mathrm{P}^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\overline{\mathrm{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{J}_n(0) = \overline{\mathrm{N}}e^{\overline{\mathrm{N}}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8) Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ et montrer que l'on peut écrire:

$$\mathrm{J}_n(\mu)e^{\mathrm{J}_n(\mu)} = \lambda\mathrm{I}_n + (\mu+1)e^\mu\mathrm{J}_n(0) + (\mathrm{J}_n(0))^2 p(\mathrm{J}_n(0))$$

où p est un polynôme à cœfficients complexes qui dépend de μ.

9) Montrer que $(\mu+1)e^{\mu}\mathrm{J}_n(0) + (\mathrm{J}_n(0)^2 p(\mathrm{J}_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{J}_n(\lambda) = \mathrm{M}e^{\mathrm{M}}$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10) Montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante:

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{J}_p(0) & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{C} \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs $\mathrm{T_X}$ suivante:

$$\mathrm{T_X} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{X} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{I}_{n-p} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

11) Montrer que $\mathrm{T_X}$ est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $\mathrm{A}' = \mathrm{T_X}\mathrm{A}\mathrm{T_X}^{-1}$ est de la forme:

$$\mathrm{A}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{J}_p(0) & \mathrm{Y} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{Z} \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Z} \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

12) Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $\mathrm{X}_{(i)}$ la ième ligne de X pour $i \in \{1,...,p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $\mathrm{J}_p(0)$ dans le produit $\mathrm{J}_p(0)\mathrm{X}$.)

13) Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

14) En déduire que lorsque $1 \leq p \leq n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{J}_{p_1}(0) & & & (0) \\ & \mathrm{J}_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \mathrm{J}_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, ..., p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

D. Représentation $\mathrm{A}e^{\mathrm{A}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordre de multiplicité respectifs $\alpha_1, ..., \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ définie par $\mathrm{F}_i = \ker((f-\lambda_i)^{\alpha_i})$ pour tout $i \in \{1, ..., s\}$.

On admet que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i.

15) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mathrm{I}_{\alpha_1} + \mathrm{N}_1 & & & (0) \\ & \lambda_1\mathrm{I}_{\alpha_2} + \mathrm{N}_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s\mathrm{I}_{\alpha_s} + \mathrm{N}_s \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{N}_1, ..., \mathrm{N}_s$ sont des matrices nilpotentes.

16) Montrer que l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}e^{\mathrm{A}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même est surjective.