Chapitre X - TD

Corrigé des exercices 28 et 31

Exercice 28. [Mines]

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E.

1. Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace de E.
2. Que dire de l'adhérence de F lorsque F est un hyperplan de E ? On commencera par le cas où E est de dimension finie.

Éléments de correction :

1. D'abord, (0_{E}) est à valeur dans F, de limite 0_{E} donc $0_{\mathrm{E}} \in \overline{\mathrm{F}}$.

   Ensuite, soit $x, y \in \overline{\mathrm{F}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On peut trouver (x_n) et (y_n) à valeur dans F de limites respectives x et y. Alors $\lambda x_n + y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x + y$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda x_n + y_n \in \mathrm{F}$. Donc $\lambda x + y \in \overline{\mathrm{F}}$. Ainsi $\overline{\mathrm{F}}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si F est un hyperplan, alors $\overline{\mathrm{F}}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F donc $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$ ou E.

   Si E est de dimension finie, alors $\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{F}$. Soit en effet $d = \dim \mathrm{E}$, $(e_1, \ldots, e_{d-1})$ une base de F, complétée en une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de E. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ désignent les formes linéaires coordonnées, continues car linéaires définies sur un espace de dimension finie, alors $\mathrm{F} = \varphi_d^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

   Si E est de dimension infinie, on ne peut pas conclure. Précisément, F est fermé (donc égal à son adhérence) si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire continue. Dans le cas contraire F est dense.

   En effet soit φ une forme linéaire de noyau F. Si φ est continue alors $\mathrm{F} = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé. Réciproquement si F est fermé, soit $a \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(a) = 1$. Alors $a + \mathrm{F}$ est encore fermé (stable par passage à la limite) donc son complémentaire est ouvert. En particulier, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, r) \subset \mathrm{E} \setminus (a + \mathrm{F})$, donc $\overline{\mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, r/2)} \subset \mathrm{E} \setminus (a + \mathrm{F})$. Et $\varphi\left(\overline{\mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, r/2)}\right)$ est donc un intervalle (image d'un convexe par une forme linéaire) qui ne contient pas 1, ni -1 par symétrie, mais qui contient $\varphi(0_{\mathrm{E}}) = 0$. C'est donc un intervalle inclus dans $]-1\,;1[$ et donc $\varphi\left(\overline{\mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, 1)}\right) \subset [-2/r\,; 2/r]$ par linéarité. Ceci assure que φ est $2/r$-lipschitzienne donc continue.

   Donnons enfin des exemples de formes linéaires continues et non continues, donc d'hyperplans fermés ou denses. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni de la norme $\|\ \|_{\infty,[-1\,;1]}$. Si $a \in [-1\,;1]$ alors $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(a)$ est clairement continue donc $\mathrm{F}_a = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,|\, \mathrm{P}(a) = 0\}$ est fermé.

   Et si $a \notin [-1\,;1]$, alors $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(a)$ n'est pas continue (par exemple, (X^n) est bornée mais pas son image par $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A})$) donc $\mathrm{F}_a = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \,|\, \mathrm{P}(a) = 0\}$ n'est pas fermé donc est dense.

Exercice 31. [Mines]

Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne et $g : x \in \mathrm{E} \mapsto \inf_{y\in\mathrm{A}} \{k\|x - y\| + f(y)\}$. Montrer que g est bien définie et qu'on peut prolonger f par g sur E. Montrer que g est k-lipschitzienne.

Éléments de correction :

- Montrons d'abord que g est bien définie. Soit $x \in \mathrm{E}$. $\{k\|x - y\| + f(y),\ y \in \mathrm{A}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (puisque A est non vide), il reste à montrer qu'elle est minorée.

  On fixe $y_0 \in \mathrm{A}$. Pour tout $y \in \mathrm{A}$, on a $|f(y) - f(y_0)| \leq k\|y - y_0\|$ donc $f(y) \geq f(y_0) - k\|y - y_0\|$.

  D'autre part $|\|x - y\| - \|y_0 - y\|| \leq \|(x - y) - (y_0 - y)\| = \|x - y_0\|$ donc $\|x - y\| \geq \|y - y_0\| - \|x - y_0\|$. Multipliant par k cette minoration et la sommant avec la précédente, il vient $f(y) + k\|x - y\| \geq f(y_0) - k\|x - y_0\|$, quantité inépendante de y. Ainsi $\{k\|x - y\| + f(y),\ y \in \mathrm{A}\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, donc admet une born inférieure $g(x)$.

- Si $x \in \mathrm{A}$, le calcul précédent donne, en prenant $y_0 = x$, la minoration $f(y)+k\|x-y\| \geq f(x)$, pour tout $y \in \mathrm{A}$. Comme de plus $f(x)$ est alors élément de l'ensemble $\{k\|x-y\|+f(y),\ y \in \mathrm{A}\}$, c'est son minimum et donc $g(x) = \min_{y\in\mathrm{A}}\{k\|x-y\|+f(y)\} = f(x)$. Autrement dit g prolonge bien f.

- Soit $x, z \in \mathrm{E}$. Pour tout $y \in \mathrm{A}$, on a comme précédemment $\|z - y\| \geq \|x - y\| - \|x - z\|$ donc $f(y) + k\|z - y\| \geq f(y) + k\|x - y\| - k\|x - z\| \geq g(x) - k\|x - z\|$ par définition de $g(x)$.

  Et donc par définition de $g(z)$ (plus grand minorant de l'ensemble), on a $g(z) \geq g(x) - k\|x - z\|$ soit $g(x) - g(z) \leq k\|x - z\|$.

  De même en échangeant les rôles, $g(z) - g(x) \leq k\|x - z\|$, et donc $|g(x) - g(z)| \leq k\|x - z\|$, ce qui prouve bien que g est k-lipschitzienne.