Chapitre 13 : Eléments propres

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1 Eléments propres pour un endomorphisme

Dans ce paragraphe : E désigne un K espace vectoriel de dimension quelconque.

1.1 Introduction : droite stable

Soit u un endomorphisme de E et D une droite stable de E.
Alors on peut écrire $D = Vect(x)$ avec $x \neq 0_E$
D stable par u donne $u(x) \in D$ et donc $\exists \lambda \in K\ ,\ u(x) = \lambda x$

Réciproquement si il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$ alors $D = Vect(x)$ est stable par u.

On a donc :

Lemme. *(Préliminaire)*
Soit $u \in L(E)$ et $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$: $Vect(x)$ stable par $u \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in K\ ,\ u(x) = \lambda x$

Remarque. *On sera donc amené à considéré l'équation*
$\boxed{u(x) = \lambda x}$ *et à poser les définitions du paragraphe suivant.*

1.2 Valeur et vecteur propre

Définitions. *Soit $u \in L(E)$ un endomorphisme de E. Alors, on dit que :*

- *$\lambda \in K$ est une valeur propre de u si et seulement si $\exists x \in E$ tel que* $\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ x \neq \overrightarrow{0_E} \end{cases}$
- *$x \in E$ est un vecteur propre de u si et seulement si $\exists \lambda \in K$ tel que* $\begin{cases} u(x) = \lambda x \\ x \neq \overrightarrow{0_E} \end{cases}$

Remarques. *Attention un* **vecteur propre n'est jamais nul.**
Par contre 0 peut très bien être valeur propre de u.
La relation a retenir est $u(x) = \lambda x$ (appelée "équation aux éléments propres").
Si on a cette relation et que $x \neq \overrightarrow{0_E}$ alors on dit que x et λ sont valeur et vecteur propre associés.

1.3 Autres éléments propres

Définitions. *Soit $u \in L(E)$. Alors on note $sp(u)$ et on appelle* **spectre de u** *l'ensemble des valeurs propres de u.*
Pour $\lambda \in sp(u)$ on pose $E_\lambda(u) = ker(u - \lambda Id_E)$.
$E_\lambda(u)$ est appelé **sous espace propre** *de u associé à la valeur propre λ.*

1.4 Propriétés immédiates

1.4.1 Structure

Lemme. *Avec les notations précédents : E_λ est un sous espace vectoriel de E*

Remarque. *E_λ est l'ensemble des vecteurs propres de u associé à la valeur propre λ auquel on rajoute le vecteur nul.*

1.4.2 Valeur propre 0 et noyau

Lemme. *Avec les notations précédents, si 0 est valeur propre alors le sous espace propre associé est $ker(u)$*
On a donc u **injective** $\Leftrightarrow 0 \notin sp(u)$

preuve :

1.4.3 Intérêt

Lemme. *Si $B = (e_1, e_2, .., e_n)$ est une base de vecteurs propres de u alors $M_B(u)$ est une matrice* **diagonale.**

preuve :

1.4.4 Exemple

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f \in L(E)$ défini par $f(P) = X^2P''$.

1.5 Caractérisation des valeurs propres

Lemme. *Soit $u \in L(E)$. Alors : $\lambda \in sp(u)$*
$\Leftrightarrow \exists x \in E$ *tel que :* $x \neq \overrightarrow{0_E}$ *et* $u(x) = \lambda x$
$\Leftrightarrow ker(u - \lambda Id_E) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$
$\Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ *n'est pas injectif*

Remarque. *Si de plus E est de dimension finie alors :*
$\lambda \in sp(u)$
$\Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ *n'est pas surjectif*
$\Leftrightarrow u - \lambda Id_E$ *n'est pas bijectif*
$\Leftrightarrow rg(u - \lambda Id_E) \neq dim(E) \Leftrightarrow det(u - \lambda Id_E) = 0$
Cette dernière caractérisation est la plus pratique, on la développera au paragraphe suivant puisque l'on travaillera surtout en dimension finie.

1.6 Théorèmes importants

1.6.1 Somme directe

Théorème . Une somme finie de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Corollaire. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

preuve :

1.6.2 Valeur propre et polynôme

Théorème . *Soit $u \in L(E)$, $\lambda \in sp(u)$ et $x \in E_\lambda$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ*

$$\text{Alors : } \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N} \ , \ \mathbf{u^k(x) = \lambda^k x} \\ \forall P \in K[X] \ , \ \mathbf{P(u)(x) = P(\lambda)x} \\ \textit{Si } \lambda \textit{ est valeur propre de } u \\ \ \textit{alors } P(\lambda) \textit{ est valeur propre de } P(u) \end{cases}$$

Corollaire. Si P est polynôme annulateur de u alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.

preuve :

Exemple. *Si u est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{L(E)}$) alors 0 est la seule valeur propre de u.*

1.7 Stabilité

Lemme. *Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in K$ alors* E_λ **est stable par** u**.**

preuve :

Lemme. *Soit $(u, v) \in L(E)^2$ tel que u et v commutent.*
Alors **les sous espaces propres de** u **sont stables par** v**.**

preuve

2 Cas particulier de la dimension finie : Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe E **est dimension finie.** et on pose $n = dim(E)$.

2.1 Définition

Définition. *Soit $u \in L(E)$. Alors on pose*
$\chi_u(X) = det(XId_E - u)$**.**
χ_u est appelé polynôme caractéristique de u.

Remarque. *On a parfois $\chi_u(X) = det(u - XId_E)$ (ancien programme), ne change que le signe ...*

Exemple. *Polynôme caractéristique d'une symétrie.*

2.2 Propriété

Propriété. *χ_u est un polynôme* **unitaire de degré** n**.**
Le terme constant de χ_u vaut $\chi_u(0) = (-1)^n det(u)$**.**
Le terme de degré $n-1$ vaut $-tr(u)$

preuve :

2.3 Lien avec sp(u)

Lemme. *Si $u \in L(E)$ alors :* $\lambda \in sp(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$**.**

Remarque. *$sp(u)$ est donc l'ensemble des racines de χ_u.*

Corollaire. *$sp(u)$ possède au plus* n **éléments.**
Si $K = \mathbb{C}$ alors u admet au moins une valeur propre.

preuve :

2.4 Ordre de multiplicité

2.4.1 Définition

Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in sp(u)$. Alors on appelle ordre de multiplicité de λ comme valeur propre de u l'ordre de multiplicité de λ **comme racine de** χ_u**.**

2.4.2 Théorème

Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in sp(u)$. On note k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.
Alors : $1 \leq dim(E_\lambda(u)) \leq k$**.**

Corollaire. *Si λ est valeur propre* **simple**
alors $dim(E_\lambda(u))) = 1$

preuve :

2.5 Théorème de Hamilton-Cayley

Théorème . **Si** $u \in L(E)$ **alors** $\chi_u(u) = 0_{L(E)}$

Remarque. *Autrement dit, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u.*

preuve : (non exigible)

3 Généralisation pour une matrice

On va généraliser à $A \in M_n(K)$ les notions précédentes. On ne perdra pas de vue que A est la matrice relativement à la base canonique de $M_{n,1}(K)$ d'un endomorphisme u de $L(M_{n,1}(K))$.

3.1 Eléments propres pour une matrice

Définitions. *Soit $A \in M_n(K)$. Alors :*

- *$\lambda \in K$ est valeur propre de A*

  si et seulement si $\exists X \in M_{n,1}(K)$ tel que $\begin{cases} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{cases}$
- *$X \in M_{n,1}(K)$ est un vecteur propre de A*

  si et seulement si $\exists \lambda \in K$ tel que : $\begin{cases} AX = \lambda X \\ X \neq 0 \end{cases}$
- *On note $sp(A)$ et on appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A.*
- *Si $\lambda \in sp(A)$ alors on pose $E_\lambda(A) = ker(A - \lambda I_n)$.*
  Cet ensemble est appelé sous espace propre de A associé à la valeur propre λ.

Remarques. *On note parfois $sp_K(A)$ le spectre de A pour bien spécifiée dans quel corps on travaille.*
En particulier si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors il faut bien faire la différence entre $sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $sp_{\mathbb{C}}(A)$ qui peuvent être différent.

3.2 Caractérisation des valeurs propres

Lemme. *Soit $A \in M_n(K)$. Soit $\lambda \in K$. Alors :*
$\lambda \in sp(A)$
$\Leftrightarrow ker(A - \lambda I_n) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$
$\Leftrightarrow rg(A - \lambda I_n) \neq n$
$\Leftrightarrow det(A - \lambda I_n) = 0$

3.3 Polynôme caractéristique

3.3.1 Définition

Définition. *Soit $A \in M_n(K)$.*
Alors on pose $\chi_A(X) = det(XI_n - A)$.
χ_A est appelé polynôme caractéristique de A.

3.3.2 Propriété

Lemme. *χ_A est un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme :* $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$
Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A
Le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A.

Définitions. *L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de A est défini comme étant l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_A.*

Exemple. *Valeurs propres de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.4 Cas particulier

Lemme. *Si A est une matrice triangulaire alors ses valeurs propres sont* **les termes de la diagonale**

preuve :

3.5 Théorèmes

Théorème . *Soit $A \in M_n(K)$ et $\lambda \in sp(A)$. On note k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.*
Alors : $1 \leq dim(ker(A - \lambda I_n)) \leq k$

Corollaire. *Si λ est valeur propre simple de A*
alors $dim(ker(A - \lambda I_n)) = 1$

Théorème . **Une somme finie de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.**

Théorème . *Théorème de Hamilton-Cayley*
Si $A \in M_n(K)$ **alors** $\chi_A(A) = 0_{M_n(K)}$

Remarque. *Autrement dit, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.*

preuve : (non exigible)

3.6 Lien avec les endomorphismes

Lemme. *Soit A une matrice de $M_n(K)$ et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admettant A comme matrice relativement à une base B de E. Alors :*
i) $\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \lambda \in sp(u)$
ii) $\chi_u = \chi_A$
iii) x vecteur propre de u $\Leftrightarrow$ $M_B(x)$ vecteur propre de A
iv) L'ordre de multiplicité est le même comme valeur propre de A et comme valeur propre de u.

3.7 Matrices semblables

Lemme. *Deux matrices semblables ont* **même rang, même trace, même déterminant, même spectre et même polynôme caractéristique.**

Remarques. *Attention ! ! il n'y a pas de réciproque ! ! !*
Attention, les sous-espaces propres sont différents ! !
On a de même que : A et A^T ont même rang, même déterminant, même trace, même spectre et même polynôme caractéristique.

Sommaire