Chapitre 12 : Séries entières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Séries entières

Définitions. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.*

Alors on appelle **série entière** *associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n z^n \end{array}$.

La **somme de la série entière** *est la fonction $z \mapsto S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.*

Remarques. *Il y a toujours convergence pour $z = 0$ et $S(0) = a_0$ car par convention $0^0 = 1$ (pour évaluer les séries entières en 0).*
On dit que l'on a une série entière complexe de la variable complexe.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et si on considère la série de fonctions $\sum a_n t^n$ avec t réel, on parle de série entière réelle de la variable réelle.
Si on supprime les premiers termes, on considère encore $z \mapsto S(z) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$ comme une série entière.
Si les (a_n) sont nuls à partir d'un certain rang, on retrouve les fonctions polynomiales.
Dans ce chapitre on considère d'abord des séries entières complexes d'une variable complexe, et notamment leur domaine de définition.
Dans une deuxième temps on considérera des séries entières réelles d'une variable réelle et on étudiera leurs sommes.

1.2 Exemples de domaines de définition

Exemple. *1*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$

Exemple. *2*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{n^2}$ *(qui est bien une série entière dite lacunaire)*

Exemple. *3*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n)! z^n$

Exemple. *4*
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+3}}{n!}$

2 Etude du domaine de convergence d'une série entière

2.1 Lemme D'Abel

2.1.1 Enoncé

Lemme. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$.*
Etant donné un nombre complexe z_0, tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée
Alors, pour tout nombre complexe z : $|z| < |z_0| \Rightarrow$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

2.1.2 preuve

2.1.3 Interprétation

2.2 Rayon de convergence : Première définition

Définition. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{C}$. *Alors on appelle* **rayon de convergence** *de la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *la borne supérieure dans* $[0;+\infty]$ *des réels* $r \geq 0$ *tels que la suite* $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Remarques. *R est bien définie comme borne supérieure d'une partie non vide (contient 0) de* $\mathbb{R}$.
Si on note R ce rayon de convergence alors : $R = sup(\{r \geq 0\ ,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\})$
Comme la définition de R est une propriété asymptotique, on parle souvent du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$*, puisque les premiers termes de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'interviennent pas dans la définition de R.*
On utilisera la notation $R = R(\sum a_n z^n)$ *pour désigner le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$

2.3 Domaine de convergence

2.3.1 Lemme préliminaire

Lemme. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors,* $\forall z \in \mathbb{C}$ *:*

$$|z| > R \Rightarrow (a_n z^n) \text{ n'est pas bornée}$$

$$|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente}$$

preuve :

2.3.2 Disque ouvert de convergence

Définitions. *Si* $\sum a_n z^n$ *est une série entière de rayon de convergence R.*
Alors on appelle **disque ouvert de convergence** *de cette série entière le disque* $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < R\}$.
Le cercle $\{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = R\}$ *est appelé* *cercle d'incertitude*.

Remarque. *Si on note D le domaine de définition de la fonction S, alors :* $\mathring{B}(0,1) \subset D \subset \overline{B}(0,1)$

2.3.3 Interprétation

2.4 Autres formulations

Définition. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence R. Alors :*
$R = sup(\{r \geq 0\ ,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée }\})$
$R = sup(\{r \geq 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\})$
$R = sup(\{r \geq 0\ ,\ \sum a_n r^n \text{ est convergente }\})$
$R = sup(\{r \geq 0\ ,\ \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente }\})$

et avec des inf
$R = inf(\{r \geq 0\ ,\ \sum a_n r^n \text{ est divergente }\})$
$R = inf(\{r \geq 0\ ,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée }\})$
$R = inf(\{r \geq 0\ ,\ NON(\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0)\})$

Remarque : on a les mêmes formulations sous la forme :
$R = sup(\{|z|\ , z \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n z^n$ convergente $\})$ etc ..

2.5 Exemples de calculs de rayon de convergence

Exemple. *1*
$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Exemple. *2*
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$

Exemple. *3*
$\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$

Exemple. *4*
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$

3 Calcul pratique du rayon de convergence

3.1 Avec la définition

Cf paragraphe précédent

3.2 Règles de comparaison, négligeable, dominée

3.2.1 Enoncé

Lemme. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres complexes.*
On note R_a *le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *et* R_b *le rayon de convergence de* $\sum b_n z^n$*.*

$$\text{Alors : } \begin{cases} i)\ [\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |a_n| \leq |b_n|] \Rightarrow R_a \geq R_b \\ ii)\ a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b \\ iii)\ a_n = o(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b \end{cases}$$

remarque : pour la première, on peut aussi dire $[\exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall n \geq n_0\ \ |a_n| \leq |b_n|] \Rightarrow R_a \geq R_b$

3.2.2 preuve

3.2.3 Exemple

$\sum (2 + sin(ch(n)))z^n$.

3.3 Règle de l'équivalent

3.3.1 Enoncé

Lemme. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres complexes.*
On note R_a *le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *et* R_b *le rayon de convergence de* $\sum b_n z^n$*.*

Alors : $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

3.3.2 preuve

3.3.3 Exemple

$\sum \frac{sin(\frac{1}{n})}{sh(ln(1+\frac{1}{n}))} z^n$.

3.4 Produit d'une série entière par...

3.5 Théorème

Théorème . *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*

$$Alors \begin{cases} R(\sum n a_n z^n) = R(\sum a_n z^n) \text{ produit par } n \\ R(\sum a_n z^{n+1}) = R(\sum a_n z^n) \text{ produit par } z \\ \text{si } \lambda \in C^* \text{ alors } R(\sum \lambda a_n z^n) = R(\sum a_n z^n) \text{ produit par un scalaire non nul} \end{cases}$$

Remarques. *Attention, si* $\lambda = 0$ *le dernier résultat est faux.*
En lisant les résultats de droite à gauche on peut diviser par n, z *ou* λ *sans changer le rayon de convergence.*

3.5.1 Exemple

$\sum \frac{z^{n+2}}{n(n-1)}$

3.6 Utilisation de la règle de D'Alembert pour les séries

Exemple : $\sum \binom{2n}{n} z^{2n+3}$

Remarque. *Si on a* (a_n) *une suite de complexes non nul à partir d'un certain rang et si* $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in [0, +\infty]$ *alors le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *vaut* $R = \frac{1}{\lambda}$ *avec la convention* $R = +\infty$ *si* $\lambda = 0$

3.7 Structure vectorielle, somme de deux séries entières

3.7.1 Notations

Si K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors on note $K[[X]]$ l'ensemble des séries entières à coefficients dans K.

3.7.2 Lemme 1

Lemme. $K[[X]]$ *est un* K *espace vectoriel.*

3.7.3 Lemme 2 : somme de deux séries entières

Lemme. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_a *et* $\sum b_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_b.
Alors : $\sum (a_n + b_n) z^n$ *est une série entière de rayon de convergence* R ,
avec $R = min(R_a, R_b)$ *si* $R_a \neq R_b$ *et* $R \geq R_a$ *si* $R_a = R_b$

preuve :

3.7.4 Corollaire

Lemme. *L'ensemble des séries entières de* $K[[X]]$ *de rayon de convergence supérieur ou égale à* R *est un sous espace vectoriel de* $K[[X]]$

preuve :

3.8 Produit de deux séries entières

Théorème . *Soit* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *deux suites de nombres complexes.*
On note R_a *le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n$ *et* R_b *le rayon de convergence de* $\sum b_n z^n$.
Soit R *le rayon de convergence de la série produit* $\sum c_n z^n$ *avec* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Alors : $R \geq Min(R_a, R_b)$ *et* $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < Min(R_a, R_b) \Longrightarrow (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = (\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n)$

preuve :

Exemples.

4 Somme d'une série entière de la variable réelle

4.1 Généralités, notations

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres **complexes**. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
On note $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque x est réel.
On a alors S qui est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On peut remarquer que le domaine de définition de S est de la forme $]-R;R[$, $]-R;R]$,$[-R;R[$ ou $[-R;R]$.
On dit que $]-R;R[$ est l'intervalle ouvert de convergence de S.

Remarques. *On gardera ces notations pour la suite du paragraphe.*
Les (a_n) ne sont pas forcément réels, même si c'est souvent le cas dans les exemples et exercices.

4.2 Premières propriétés

4.2.1 Convergence normale

Théorème . *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.*
Alors $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Remarques. *Il y a donc aussi convergence uniforme sur tout segment de $]-R,R[$*
Il n'y a pas à priori convergence normale sur $]-R;R[$.

preuve :

4.2.2 Continuité

Théorème . *Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.*

Alors $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R;R[$ l'intervalle ouvert de convergence.

Remarque. *On peut démontrer que qu'il y a continuité sur le domaine de définition de la somme mais c'est hors programme.*

preuve :

4.3 Dérivation

Théorème . *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de la variable réelle de rayon de convergence* R *dont on note* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somme.*

Alors :

La fonction S *est de classe* C^∞ *sur son intervalle* **ouvert** *de convergence.*
De plus on peut dériver terme à terme S*, et ses dérivées successives, sur son intervalle ouvert de convergence.*
On a en particulier : $\forall x \in]-R; R[\ ,\ S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in]-R; R[\ ,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! a_n x^{n-k}}{(n-k)!}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

preuve :

4.4 Intégration

Théorème . *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de la variable réelle de rayon de convergence* R *dont on note* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somme.*

Alors la fonction S *est continue sur son intervalle ouvert de convergence et*
on peut intégrer terme à terme S*, sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence.*
On a en particulier : $\forall \alpha \in]-R; R[\ ,\ \forall \beta \in]-R; R[\ \ ,\ \int_\alpha^\beta S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{n+1}$

Corollaire. *Les primitives de* S *sur* $]-R; R[$ *s'écrivent* $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \alpha$ *avec* $\alpha \in K$
Elles ont pour rayon de convergence R*.*

preuve :

4.5 Exemples d'applications

Exemple. *1 calcul d'une somme*
Calcul de $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-n}$

Exemple. *2 : calcul d'une somme*
$S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Exemple. *3 Exemple important : fonctions* C^∞
Montrer que $S_3(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$

5 Fonctions développables en séries entières

5.1 Fonctions DSE

5.1.1 DSE$_0$

Définition. *Soit $r > 0$ et f une fonction définie sur $[-r, r]$.*
Alors on dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$
si et seulement si il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que :

$$\forall x \in]-r; r[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *On dit aussi que f est développable en série entière en 0 (on note parfois DSE_0).*

5.1.2 Exemple

Lemme. $x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ *est développable en série entière sur $]-1, 1[$*

preuve :

5.1.3 Généralisation

Définition. *On dit qu'une fonction f est développable en série entière en $x_0 \in \mathbb{R}$*
si et seulement si $h \mapsto f(x_0 + h)$ est développable en série entière en 0.

Remarque. *On a alors, pour h au voisinage de 0 : $f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$*

5.2 Unicité et lien avec la série de Taylor

5.2.1 Théorème

Théorème . *Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors :*
- *f est C^∞ au voisinage de 0*
- *son développement en série entière est unique et est donné par son développement de Taylor, c'est-à-dire que :*

$\forall x \in]-r; r[\ ,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

preuve :

Remarque. *On obtient les DL en 0 de f par troncature du DSE_0.*

5.2.2 Conséquences

De ce qui précède on déduit :
f est développable en série entière en 0
si et seulement si

$$\exists r > 0\ ,\ \begin{cases} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-r; r[\\ \textbf{et} \\ \text{pour tout } t \text{ dans }]-r; r[, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(t). \end{cases}$$

Pour examiner la deuxième condition il est naturel de former $R_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$

On peut utiliser l'égalité de Taylor avec reste intégral (hors programme) : $R_n(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$

Il s'agit donc d'examiner si $R_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exemple. *DSE_0 de $x \mapsto sin(x)$*

5.3 DSE$_0$ usuels

Théorème .

$$\forall x \in]-1;1[\ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in [-1;1[\ ,\ -ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1;1[\ ,\ arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in]-1;1[\ ,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n}{n!}$$

preuve :

5.4 Utilisation pour les équations différentielles

Exemple. *Recherche des solutions DSE_0 de $xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$*

6 Compléments sur les séries entières d'une variable complexe

6.1 Continuité

Théorème . *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière d'une variable complexe de rayon de convergence R.*

Alors $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

preuve : HP

Remarque. *On s'arrête à la continuité, la dérivation des fonctions d'une variable complexe et étant hors programme.*

6.2 Cas particulier

Théorème . $\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ $\qquad \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

preuve et propriétés : voir cours sur les séries pour exp