Complément chapitre 8 : Eléments propres

Théorème . *Soit A une matrice de $M_n(K)$ avec $n \geq 1$ et χ_A son polynôme caractéristique.*
Alors χ_A est un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme : $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$

preuve :

Par définition $\chi_A(X) = det(XI_n - A)$

On note $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(K)$ de telle sorte que I_k est la k-ième colonne de I_n.

On notera aussi pour $k \in [\![1;n]\!]$, C_k la k-ième colonne de A.

On a alors $A = (C_1|C_2|\ldots|C_n)$ et $I_n = (E_1|E_2|\ldots|E_n)$, donc $XI_n - A = (XE_1 - C_1|\ldots|XE_k - C_k|\ldots|XE_n - C_n)$

On a donc : $\chi_(A) = det(XI_n - A) = det(XE_1 - C_1|\ldots|XE_k - C_k|\ldots|XE_n - C_n)$
Par linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne on a : $\chi_A(X) = \sum\limits_{i_1=1}^{2} \sum\limits_{i_2=1}^{2} \cdots \sum\limits_{i_n=1}^{2} det(C'_{1,i_1}|\ldots|C'_{k,i_k}|\ldots|C'_{n,i_n})$
avec $C'_{k,1} = XE_k$ et $C'_{k,2} = -C_k$

On remarque alors que $det(C'_{1,i_1}|\ldots|C'_{k,i_k}|\ldots|C'_{n,i_n})$ est un polynôme en X de degré, le nombre de fois ou C'_{j,i_k} vaut XE_k (ou encore le nombre de i_k valant 1).

- Pour avoir un terme de degré n il faut que tout les c'_{k,i_k} valent XE_k, le terme en X^n est donc :
$det(E_1|\ldots|E_n) = det(I_n) = 1$

- Pour avoir un terme de degré $n-1$ il faut que tout les c'_{k,i_k} valent XE_k sauf exactement 1, le terme en X^{n-1} est donc :

$$\sum_{k=1}^{n} det(XE_1|\ldots|XE_{k-1}| - C_k|X_Ek+1|\ldots|XE_n)$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} det(E_1|\ldots|E_{k-1}| - C_k|_Ek+1|\ldots|E_n))X^{n-1}$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{1,k} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{k-1,k} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_{k,k} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & -a_{k+1,k} & 1 & 0\ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_{n,k} & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} X^{n-1}$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} -a_{k,k})X^{n-1}$$
$$= -tr(A)X^{n-1}$$

- Le terme de degré 0 est plus simple puisqu'il vaut : $\chi_A(0) = det(0.I_n - A) = det(-A) = (-1)^n det(A)$

- Au bilan, on a bien $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$.