Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°7

EXERCICE n°1

a) • Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

• Si $x \in]0,1]$, alors, pour $n > \frac{1}{x}$ on a $\frac{1}{n} < x$, donc $f_n(x) = 0$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Bilan : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers la fonction nulle.}}$

b) f_n est clairement continue sur $[0, \frac{1}{n}[$ et sur $]\frac{1}{n}, 1]$.
Comme $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x<\frac{1}{n}}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x<\frac{1}{n}}} n^2x(1-nx) = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x>\frac{1}{n}}} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n})$ alors f_n est continue en $\frac{1}{n}$

On a f_n dérivable sur $[0, \frac{1}{n}[$ et $\forall x \in [0, \frac{1}{n}[\ ,\ f_n'(x) = n^2(1 - nx - nx) = n^2(1 - 2nx)$

$\frac{1}{2n} \in [0, \frac{1}{n}[$, on a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		$+$		$-$	$\|\|$	0	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{2}{n})$	$\searrow$	0	$\longrightarrow$	0

Avec $f_n(\frac{1}{2n}) = n^2\frac{1}{2n}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{n}{4}$

c) f_n est bornée sur $[0,1]$, on peut donc justifier la définition de $||f_n||_\infty$.
Avec les variations du b) on a même : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ ||f_n||_\infty = \frac{n}{4}}$

d) Si (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, ce serait vers la fonction nulle et on aurait alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty = 0$. Mais le c) permet d'affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_\infty = +\infty$.

Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,1].}$

EXERCICE n°2

a) • Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

• Si $x > 0$, alors, $exp(\frac{-1}{nx}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} exp(0) = 1$ et $\frac{1}{2+nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Bilan : $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } [0,+\infty \text{ vers la fonction nulle.}}$

b) • Si $x \in [a, +\infty[$ alors $0 \leq exp(\frac{-1}{nx}) \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{2+nx} \leq \frac{1}{2+na}$.
Donc $\forall x \in [a, +\infty[\ ,\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2+na}$, on en déduit : $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2+na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers la fonction nulle sur } [a,+\infty[\text{ (pour } a>0)}$

• On remarque que $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3e}$, donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geq \frac{1}{3e}$ et on ne peut pas avoir $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

et donc $\boxed{(f_n) \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,+\infty[}$

EXERCICE n°3

1.) On remarque alors que $\sum f_n(x)$ est une série alternée, comme de plus $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$ (car $x \geq 1 > 0$) on peut appliquer le critère des séries alternées et on obtient que : $\sum f_n(x)$ est convergente.

On a donc : $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } J.}$

2.) On a la norme infinie sur J de f_n qui vaut : $||f_n||_{\infty,J} = \sup\limits_{t\in J} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} > 0$.

Comme $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann divergente alors $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ ne converge pas normalement sur } J}$

3.) Toujours avec le théorème spécial sur les séries alternées on a :

$\forall x \in J \ , \ \forall N \in \mathbb{N} \ , \ \left|\varphi(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x)\right| \leq |f_{N+1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}} \leq \frac{1}{\sqrt{N+2}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme la majoration est indépendante de x alors $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } J}$

4.) On cherche $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

Avec le théorème spécial on a : $|\varphi(x) - 1| = |\varphi(x) - f_0(x)| \leq |f_1(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a donc $\boxed{\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1}$

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème de la double limite puisqu'il y a convergence uniforme.

5.1) Par le critère des séries alternées : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

5.2) $\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}$

$= [\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - 1] - \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{x}}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}})$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}})$

$g : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est de classe C^1 sur $[nx; 1+nx]$, donc par le théorème des accroissements finis :

$\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}} = g(1+nx) - g(nx) = g'(c)(1+nx-nx) = \frac{-1}{2c^{\frac{3}{2}}}$ avec $c \in]nx; 1+nx[$

Donc $\left|\frac{1}{\sqrt{1+nx}} - \frac{1}{\sqrt{nx}}\right| \leq \frac{1}{2(nx)^{\frac{3}{2}}}$

Comme $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, en notant $\xi = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ on a : $\left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{\xi}{2x^{\frac{3}{2}}}$

On a donc : $\varphi(x) - l - \frac{a}{\sqrt{x}} = O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$ et donc : $\boxed{\varphi(x) = l + \frac{a}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}})}$

EXERCICE n°4

Q1) • Si $x<0$ alors $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est grossièrement divergente.

• Si $x=0$ alors $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est grossièrement divergente.

• Si $x>0$, alors par comparaison exp-puissance $n^2e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $e^{-x\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$. Par négligeabilité, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, alors $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est convergente.

• Bilan : $\boxed{D=]0,+\infty[}$

Q2) • On pose pour tout entier n : $\begin{array}{rccc} f_n & : &]0,+\infty & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & exp(-x\sqrt{n}) \end{array}$ ainsi $f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$

• Soit $a>0$. Comme $x\mapsto f_n(x)$ est décroissante et positive sur $[a,+\infty[$ on en déduit :
$||f_n||_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = e^{-a\sqrt{n}}$
Comme $\sum e^{-a\sqrt{n}}$ est convergente (c'est $f(a)$) alors $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[a,+\infty[$

On a alors $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a,+\infty[\\ (\sum f_n) \text{ converge uniformément sur } [a,+\infty[\end{cases}$.

On peut donc appliquer le théorème de transfert de continuité pour les séries de fonctions et on en déduit f continue sur $[a,+\infty[$

• On a $\forall a>0$: f est continue sur $[a,+\infty[$.
Comme $\bigcup\limits_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[=D$, on en déduit : $\boxed{f \text{ est continue sur } D.}$

Q3) On a $f_0(x)=1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\forall n\geq 1$, $f_n(x)=e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a alors : $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N} \text{ , } \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ (\sum f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [16,+\infty[\end{cases}$

On peut donc utiliser le théorème de la double limite pour les séries de fonctions et on en déduit : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ ou encore : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$

Q4) Soit $x>0$.

• $t\mapsto exp(-x\sqrt{t})$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc $\int\limits_0^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt$ pose problème uniquement en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$: $t^2exp(-x\sqrt{t}) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x>0$ et donc $exp(-x\sqrt{t}) = o(\frac{1}{t^2})$.
Comme $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par Riemann, alors, par négligeabilité $t\mapsto exp(-x\sqrt{t})$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ puis sur $[0,+\infty[$

On a donc $\int\limits_0^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt$ convergente.

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$t \in [n, n+1]$

$\Rightarrow n \leq t \leq n+1$

$\Rightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{n+1}$

$\Rightarrow -\sqrt{n+1} \leq -\sqrt{t} \leq -\sqrt{n}$

$\Rightarrow -x\sqrt{n+1} \leq -x\sqrt{t} \leq -x\sqrt{n}$ on utilise la croissance de exp

$\Rightarrow exp(-x\sqrt{n+1}) \leq exp(-x\sqrt{t}) \leq exp(-x\sqrt{n})$

On intègre entre $t = n$ et $t = n+1$ et on a : $\forall n \in \mathbb{N}$: $exp(-x\sqrt{n+1}) \leq \int\limits_{n}^{n+1} exp(-x\sqrt{t})dt \leq exp(-x\sqrt{n})$

En sommant pour n variant de $n = 0$ à $n = +\infty$, comme les séries et l'intégrale convergent et par la relation de Chasles : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{n+1}) \leq \int\limits_{0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{n})$

Donc $f(x) - 1 \leq \int\limits_{0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt \leq f(x)$

En réordonnant on a : $\boxed{\int\limits_{0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt \leq f(x) \leq 1 + \int\limits_{0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt}$

Q5) Par le changement de variable C^1 bijectif : $u = x\sqrt{t}$ (donc $t = \frac{u^2}{x^2}$ et $dt = \frac{2udu}{x^2}$) :

$\int\limits_{0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt = \int\limits_{0}^{+\infty} exp(-u)\frac{2udu}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int\limits_{0}^{+\infty} 2uexp(-u)du$

Puis par intégrations par parties (licite car les limites aux bornes existent) :

$\int\limits_{0}^{+\infty} 2uexp(-u)du = [2u(-e^{-u})]_0^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} 2e^{-u}dt = 0 - 0 + [-2e^{-u}]_0^{+\infty} = 2$

Donc $\int\limits_{0}^{+\infty} exp(-x\sqrt{t})dt = \frac{2}{x^2}$

En reportant dans Q4) : $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2} + 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} \leq 1 + \frac{x^2}{2}$

Par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} = 1$ et donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}}$