

Chapitre 12 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 12.1

Calculer le rayon de convergence de $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n + n^2}{\exp(n + \frac{1}{n})} z^n$

Correction

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{e^n + n^2}{\exp(n + \frac{1}{n})}$

$$a_n = \frac{e^n + n^2}{e^n \exp(\frac{1}{n})} \sim \frac{e^n}{e^n} = 1$$

Donc $|a_n| \sim 1$ et comme on sait que $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 alors par la règle de l'équivalent pour les séries entières $S(z)$ a pour rayon de convergence 1.

Enoncé, Exercice 12.2

Calculer le rayon de convergence de $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n + n}{\exp(n+1)} z^{2n+1}$

Correction

Soit $z \neq 0$, alors on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) = \frac{9^n + n}{\exp(n+1)} z^{2n+1}$

On a $u_n(z) \neq 0$. Alors : $u_n(z) \sim \frac{9^n}{\exp(n+1)} z^{2n+1}$

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \sim \left| \frac{\frac{9^{n+1}}{\exp(n+2)} z^2}{\frac{9^n}{\exp(n+1)}} \right| \sim \left| \frac{9z^2}{e} \right| \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{9|z^2|}{e}$$

$$\frac{9|z^2|}{e} = 1 \Leftrightarrow |z^2| = \frac{e}{9} \Leftrightarrow |z| = \frac{\sqrt{e}}{3}$$

Alors, en appliquant la règle de D'Alembert :

$$|z| < \frac{\sqrt{e}}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| < 1 \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ est convergente.}$$

$$|z| > \frac{\sqrt{e}}{3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| > 1 \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ est divergente.}$$

Comme par définition, le rayon de convergence de $S(z)$ vaut :

$R = \text{Max}(\{|z|, z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum u_n(z) \text{ convergente}\})$, on en déduit que :

le rayon de convergence de $S(z)$ vaut $\frac{\sqrt{e}}{3}$

Énoncé, Exercice 12.3

On considère la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1}$

Déterminer la rayon de convergence R de S et calculer S sur son intervalle ouvert de convergence

Correction

Par comparaison exponentielle-puissance on a : $(n^2 x^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow |x| < 1$.

Comme $R = \text{Max}(\{|x|, x \in \mathbb{R} \text{ et } (n^2 x^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \})$ alors on en déduit $R = 1$

On va partir du résultat que l'on connaît sur la série géométrique et utiliser le fait que l'on peut dériver (deux fois) terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence. On a alors :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} (x^n) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et de même, en redérivant}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Alors : $\forall x \in]-1; 1[$, puisque toutes les séries considérées convergent :

$$\begin{aligned} & S(x) \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1} \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1+1) x^{n+1} \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1} \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1} \\ = & x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ = & x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} \end{aligned}$$

On utilise les sommes calculées ci-dessus :

$$S(x) = x^3 \frac{2}{(1-x)^3} + x^2 \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^3 + x^2(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$$

Bilan :

Le rayon de convergence de S vaut $R = 1$ et $\forall x \in]-1; 1[$, $S(x) = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$

Enoncé, Exercice 12.4

Montrer que $f(x) = \arctan(2x)$ est développable en série entière en 0 et donner ce développement.

Correction

f est C^∞ sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$

On va commencer par faire le développement en série entière de f'

On sait que $\forall X \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n X^n = \frac{1}{1+X}$

On en déduit $\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, $(2x)^2 \in]-1; 1[$ et donc

$$f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n ((2x)^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}$$

On peut intégrer une série entière terme à terme sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence, on a donc :

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + f(0)$$

Mais $f(0) = 0$ et donc :

$$f \text{ est développable en série entière en } 0 \text{ et } \forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

Énoncé, Exercice 12.5

Déterminer les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle :

$$E \Leftrightarrow xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$$

Correction

Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ait un rayon de convergence $R > 0$ et soit une solution de E sur $] -R; R[$

Comme on peut dériver une série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence alors :

$$\forall x \in] -R; R[, \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

On a alors :

y solution de E sur $] -R; R[$

$$\Leftrightarrow \forall x \in] -R; R[, \quad xy''(x) + 2y'(x) + 4xy(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in] -R; R[, \quad x \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 4x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in] -R; R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1)$$

Changement d'indice : $p-1 = n+1 \Leftrightarrow p = n+2$ dans la dernière somme et $p = n$ dans les deux premières.

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in] -R; R[, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} p(p-1) a_p x^{p-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} 2p a_p x^{p-1} + \sum_{p=2}^{+\infty} 4a_{p-2} x^{p-1} = 0$$

On fait commencer les sommes au même indice :

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in] -R; R[, \quad 0 + 0 + \sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1) a_p x^{p-1} + 0 + 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} 2p a_p x^{p-1} + \sum_{p=2}^{+\infty} 4a_{p-2} x^{p-1} = 0$$

On regroupe les sommes car elles convergent

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in] -R; R[, \quad 2a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} [p(p-1) a_p + 2p a_p + 4a_{p-2}] x^{p-1} = 0$$

Par unicité du DSE_0 , puisque $R > 0$

$$(1) \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall p \geq 2 \quad p(p-1) a_p + 2p a_p + 4a_{p-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall p \geq 2 \quad p(p+1) a_p + 4a_{p-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall p \geq 2 \quad a_p = \frac{-4}{p(p+1)} a_{p-2}$$

Recherche : $a_2 = \frac{-4}{2 \times 3} a_0$ $a_4 = \frac{-4}{4 \times 5} a_2 = \frac{4^2}{2 \times 3 \times 4 \times 5} a_0$

$$a_{2n} = \frac{-4}{(2n+1) \times (2n)} a_{2n-2} = \frac{-4}{(2n+1) \times (2n)} \cdots \frac{4^2}{2 \times 3 \times 4 \times 5} a_0$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

Au rang 0 : On a déjà montré que $a_1 = 0$ et on a bien $a_0 = a_0$

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n et on la montre au rang $n + 1$

$$a_{2n+3} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+4)} a_{2n+1} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+4)} \times 0 = 0$$

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+2)} a_{2n} = \frac{-4}{(2n+3)(2n+2)} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} a_0 = \frac{(-4)^{n+1}}{(2n+3)!} a_0 = \frac{(-4)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} a_0$$

On a donc bien le résultat au rang $n + 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} a_0 \end{cases}$

$$\text{On a donc } y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Or on sait que } \forall X \in \mathbb{R}, \sin(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n X^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On en déduit que y est de rayon de convergence $+\infty$ et que $2xy(x) = a_0 \sin(2x)$

$$\text{On a alors : } y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comme, on a raisonné par équivalences et que $R > 0$ on sait peut remonter les équivalences.

Conclusion :

Les solutions développables en séries entières en 0 de E , sont définies sur \mathbb{R} et s'écrivent :

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \frac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ a_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ avec } a_0 \in \mathbb{R}$$

Enoncé, Exercice 12.6

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{ch(x^2)-1}{x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

1°) Quelle valeur donner à λ pour que f soit continue en 0 ?

2°) On suppose que λ prend la valeur donnée au 1°).

Montrer alors que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Correction

1°) Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{ch(x^2)-1}{x^4} = \frac{(1+\frac{x^4}{2}+o(x^4))-1}{x^4} = \frac{1}{2} + o(1)$$

Si on pose $\lambda = \frac{1}{2}$ alors on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Il faut donc donner à λ la valeur $\frac{1}{2}$ pour que f soit continue en 0.

2°) On sait d'après le cours que : $\forall X \in \mathbb{R}, \quad ch(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!}$

On a alors pour $x \neq 0$ (en posant $X = x^2$) :

$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} - 1}{x^4} = \frac{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(2n)!} - 1}{x^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-4}}{(2n)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+2)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+2)!}$$

On remarque que la relation ci-dessus est valable sur \mathbb{R} , y compris en $x = 0$ à cause de la valeur choisie pour λ

On a donc f développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a donc :

f est C^∞ sur \mathbb{R}