Feuille d'exercices n°35 : Chapitre 14

Exercice 292. ⋆ *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ *avec* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$
Diagonaliser A.

Exercice 293. ⋆ *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $B = A^p$.
Montrer que : A est diagonalisable si et seulement B diagonalisable

Exercice 294. ⋆ *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*
Soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent.
Montrer que si f admet n valeurs propres distinctes alors il existe une base de E diagonalisante pour f et g simultanément.

Exercice 295. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que A admet une valeur propre triple que l'on notera λ.
b) A est-elle diagonalisable, trigonalisable ?
On pose $N = A - \lambda I_3$
c) Calculer N, N^2 et N^3.
d) Déterminer e_1 pour que (e_1) soit une base de $Im(N^2)$.
e) Déterminer e_3 tel qe : $e_1 = N^2 e_3$
On pose $e_2 = N e_3$
f) Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
g) Trigonaliser A
h) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 296. *a) Trigonaliser* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
b) Déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$

Exercice 297. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
a) Calculer M^4
b) A est-elle diagonalisable dans $M_4(\mathbb{R})$? dans $M_4(\mathbb{C})$?

Exercice 298. *Trouver toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et vérifiant* $A^3 + A = 2I_n$

Exercice 299. *Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 + M^T = I_n$. Montrer que M est diagonalisable.*