Feuille d'exercices n°32 : Chapitre 13

Exercice 261. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in L(E)$. On suppose que f et g commutent.*
Montrer que les sous espaces propres de f sont stables par g

Exercice 262. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $a \in GL(E)$.*
On définit $I_a : L(E) \to L(E)$, $u \mapsto a \circ u \circ a^{-1}$
a) Montrer que I_a est un automorphisme.
b) Soit $u \in L(E)$. On pose $v = I_a(u)$.
Montrer que $Sp(v) = Sp(u)$ et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(v) = a(E_\lambda(u))$

Exercice 263. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$.*
a) Pour quelles valeurs de a, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de A ?
b) Pour quelles valeurs de a, 0 est-elle valeur propre de A ?

Exercice 264. *Déterminer le polynôme caractéristique de U la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.*

Exercice 265. *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose $\forall P \in E \quad \phi(P) = P + (X-1)P' + (1-2X^2)P''$*
Déterminer le polynôme caractéristique de ϕ

Exercice 266. $\star$ *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$*
Trouver les éléments propres de A et l'inverse de A.

Exercice 267. *Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$.*
On considère les deux matrices de $M_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes : $C = \begin{pmatrix} A & I_n \\ -XI_n & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} B & I_n \\ -XI_n & -A \end{pmatrix}$
a) Effectuer les produits par blocs CD et DC.
b) Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 268. *Soit l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$:* $\begin{array}{cccc} f & : & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$
Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 269. $(\star)$
Soit E un espace K vectoriel et $u \in L(E)$ tel que : $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ est liée.
Montrer que $u = \lambda I_{dE}$ avec $\lambda \in K$.

Exercice 270. $(\star)$
Soit E un espace K vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que : u commutent avec tout les éléments de $L(E)$.
Montrer que $u = \lambda I_{dE}$ avec $\lambda \in K$.