Lundi 16 décembre 2024

PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°4

SUJET format 3 : ccINP / Centrale

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Problème 1 (type ccINP) : La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :
(i) la fonction f est de classe C^1,
(ii) pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
(iii) la fonction f' est croissante,
(iv) la fonction f s'annule en 1 , c'est-à-dire $f(1) = 0$.
Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]\,0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

2. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

3. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions 5. et 6. sont indépendantes.

5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.
6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

   $$\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p) \text{ et que } \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \tfrac{1}{p}$$

   En déduire que : $|h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \frac{1}{p}$

7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.
8. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

21. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!}$$

22. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.
23. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Problème 2 : type Centrale

Objectifs et notations

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- Dans la partie I, on introduit la fonction ζ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).
- La partie II étudie une fonction f définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction f fait intervenir la fonction ζ.

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

1. Déterminer D_ζ.
2. Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
3. Etudier le sens de variations de ζ.
4. Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.
5. Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$
   Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$

6. En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

7. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
8. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9. Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Etude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

II.A - Ensemble de définition et variations

10. Déterminer D_f.
11. Montrer que f est continue sur D_f et étudier ses variations.

II.B - Equivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

12. Calculer $f(k)$.
13. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.
14. Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x + k \in D_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.
15. En déduire un équivalent de f en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C - Série entière

On considère la série entière de la variable réelle x donnée par $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^k \zeta(k+1) x^k$.

16. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x = \pm R$?
17. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x \in D_f$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$.
18. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[, \quad \left| f^{(k)}(x) \right| \leq k! \left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right).$$

19. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \zeta(k+1) x^k.$$