PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°4

SUJET format 1 : ccINP avec indications

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Questions de cours

1°) Enoncer le théorème de transfert de continuité pour une suite de fonctions.

2°) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Exercice n°1

1°) Donner le développement limité en $x = 0$, à l'ordre 2 de $f : x \mapsto sin(x) - ln(1 + x)$
2°) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = sin(\frac{1}{n}) - ln(1 + \frac{1}{n})$

Exercice n°2

On considère la série entière d'une variable réelle $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$
On note R son rayon de convergence.

1°) a) Déterminer le rayon de convergence de S.

1°) b) Donner le domaine de définition de S.

2°) Déterminer pour $x \in]-R; R[$ l'expression de $S(x)$
Indication : en le justifiant, dériver terme à terme

3°) Montrer que S est continue sur $[-R; R]$

Indication : plus difficile, il n'y a pas de SE dans cette question

4°) Déterminer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

Exercice n°3

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{array}{cccc} f_n & : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{n sin(\frac{x}{n})}{1+x} \end{array}$

1) Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.

2) Montrer que : $\forall u \in [0, +\infty[$, $0 \leq u - sin(u) \leq \frac{u^3}{6}$

3) Montrer que $\forall a > 0$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

4) La convergence est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?

5) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^2 sin(y)}{1+ny} dy$
Indication : utiliser le changement de variable $y = \frac{x}{n}$

Exercice n°4

On pose $\begin{array}{cccc} f & : &]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

Montrer que f est C^∞ sur $]-1, +\infty[$

Problème : La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :
(i) la fonction f est de classe C^1,
(ii) pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
(iii) la fonction f' est croissante,
(iv) la fonction f s'annule en 1 , c'est-à-dire $f(1) = 0$.
Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]\,0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   Indication : à x fixé, trouver une équivalent de u_n, ou une domination de u_n)

   Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times]0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

   Indication : calculer ε_n

3. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.
4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

   Indication : procéder point par point,
   pour la croissance de φ' utiliser l'expression sous forme de série, mais ne pas re-dériver,
   pour $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ il y a un double télescopage

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions 5. et 6. sont indépendantes.

5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.
6. Soient $x \in]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

   $$\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p) \text{ et que } \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \tfrac{1}{p}$$

   En déduire que : $|h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \frac{1}{p}$

   Indication : montrer d'abord que $p \leq p + x \leq p + 1$

7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0,+\infty[$.

   Indication : h **et** h' **sont "presque"** 1 **périodique, utiliser un passage à la limite ...**
8. Conclure que $\varphi = g$.

   Indication : on pourra montrer que h **est bornée et utiliser la question précédente**

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

9. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

   $$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!}$$

   Indication : calculer $u_n(\frac{1}{2})$ **en décomposant comme somme de plusieurs termes, on pourra écrire :** $\prod\limits_{n=1}^{N}(2n+1) = \frac{(2N+1)!}{\prod\limits_{n=1}^{N}(2n)}$**, ne prendre l'exponentielle qu'à la fin du calcul**
10. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.
11. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

    $$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

    Indication : montrer point par point que ψ **vérifie** (C)