# PSI* 2023-2024, Mathématiques DS n°4 : Correction

## Question de cours

Voir cours

## Exercice n°1

1°) Au voisinage de $x = 0$ :

$sin(x) - ln(1 + x) = x + o(x^2) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

On a donc : $\boxed{\text{Au voisinage de } x = 0 : sin(x) - ln(1 + x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

2°) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut utiliser le 1°) pour obtenir : $u_n = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

Donc : $\begin{cases} u_n \sim \frac{1}{2n^2} > 0 \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente} \end{cases}$

On a donc, par équivalent pour les séries à termes positifs : $\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$

## Exercice n°2

1°) a) Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$ , $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

Pour $x \neq 0$ : $u_n(x) \neq 0$, on peut calculer $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)n} \frac{n(n-1)}{|x|^n} \sim |x|$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|$

La règle de D'Alembert permet d'affirmer que : $|x| < 1 \Rightarrow \sum u_n(x)$ convergente (et donc $R \geq 1$) et que : $|x| > 1 \Rightarrow \sum u_n(x)$ divergente (et donc $R \leq 1$)

$R \geq 1$ et $R \leq 1$ et donc $\boxed{R = 1}$

1°) b) Pour trouver le domaine de définition de $S$ il reste à étudier la convergence en $x = 1$ et $x = -1$

$S(1) = \sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ et $S(-1) = \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$

$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| = \left|\frac{1}{n(n-1)}\right| \sim \frac{1}{n^2} > 0$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, alors, par la règle de l'équivalent $S(1)$ et $S(-1)$ sont absolument convergentes donc convergentes.

On en déduit que $\boxed{\text{le domaine de définition de } S \text{ est } [-1, 1]}$

2°) $S$ est $C^\infty$ sur $] - R, R[$ comme série entière.

On peut dériver terme à terme une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

On a alors $\forall x \in ] - R; R[$ : $S'(x) = \frac{d}{dx}(\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{d}{dx}(\frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1} = -\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} x^p$

On a donc $\forall x \in ] - 1; 1[ \quad S'(x) = -\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p} x^p$

On reconnaît une série entière du cours et on a : $\forall x \in ]-1;1[ \quad S'(x) = ln(1+x)$

En intégrant par parties, avec des fonctions dérivables, l'expression trouvée ci-dessus on obtient sur $]-1;1[$ : $S(x) = [(x+1)ln(1+x)] - \int (x+1)\frac{1}{x+1}dx = (x+1)ln(x+1) - x + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$
Avec l'expression ci-dessus on obtient en $x = 0$ : $S(0) = \mu$
Avec l'expression sous forme de série entière on obtient : $S(0) = 0$ et on a donc $\mu = 0$

On a finalement : $\boxed{\forall x \in ]-1;1[ \quad S(x) = (x+1)ln(1+x) - x}$

3°) Posons $\forall n \geq 2$ : $\begin{array}{cccc} u_n & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n \end{array}$
On a alors $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et donc $||u_n||_\infty = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |u_n(x)| \leq \frac{1}{n(n-1)}$
Comme $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est une série convergente (voir 1°) b)), alors, par règle de comparaison pour les séries à termes positifs : $\sum ||u_n||_\infty$ est convergente et donc la série de fonction $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[-1,1]$.
Comme la convergence normale implique la convergence uniforme alors $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[-1,1]$.

On a donc $\begin{cases} \text{les fonctions } u_n \text{ sont continues sur } [-1,1] \\ \sum u_n \text{ est uniformément convergente sur } [-1,1] \end{cases}$
On en déduit par le théorème de transfert de continuité sur les séries de fonctions que $\boxed{S \text{ est continue } [-1,1]}$

4°) $S$ est continue sur $[-1;1]$ donc en particulier en $x = 1$. Alors :
$S(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ((x+1)ln(1+x) - x) = 2ln(2) - 1 = ln(4) - 1$

On en déduit $\boxed{S(1) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = ln(4) - 1}$

# Exercice n°3

1°) Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé et $n$ au voisinage de $+\infty$
$f_n(x) = \frac{n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}))}{1+x} = \frac{x + o(1)}{1+x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{1+x}$

$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge donc simplement sur } [0,+\infty[ \text{ vers } \begin{array}{cccc} f & : & [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{1+x} \end{array}}$

2°) Posons $\forall u \geq 0$ , $A(u) = u - sin(u)$ et $B(u) = \frac{u^3}{6} - u + sin(u)$
Alors $A$ est dérivable et $A'(u) = 1 - cos(u) \geq 0$, donc $A$ est croissante sur $[0, +\infty[$, comme, de plus $A(0) = 0$ alors $\forall u \geq 0 \ A(u) \geq 0$ et donc $u - sin(u) \geq 0$

$B$ est $C^\infty$. On a $B'(u) = \frac{u^2}{2} - 1 + cos(u)$ et $B''(u) = u - sin(u) \geq 0$ d'après l'étude de $A$.
Donc $B'$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme, de plus, $B'(0) = 0$ alors $\forall u \geq 0$ on a $B'(u) \geq 0$
Donc $B$ est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme, de plus, $B(0) = 0$ alors $\forall u \geq 0$ on a $B(u) \geq 0$ et donc $\frac{u^3}{6} - u + sin(u) \geq 0 \Leftrightarrow u - sin(u) \leq \frac{u^3}{6}$

En regroupant les deux résultats trouvés on a : $\boxed{\forall u \in [0, +\infty[ \ , 0 \leq \ u - sin(u) \leq \frac{u^3}{6}}$

3°) Soit $x \in [0,a]$
$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{nsin(\frac{x}{n})}{1+x} - \frac{x}{1+x}\right| = \left|\frac{n(sin(\frac{x}{n})-\frac{x}{n})}{1+x}\right| \leq \frac{n}{1+x}\left|sin(\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}\right|$

En utilisant la question Q3) :
$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{n}{1+x}\left|(\frac{x}{n})^3\right| \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n^2}\frac{x^3}{1+x} \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{x^3}{n^2}$ car $\frac{1}{1+x} \leq 1$

On a donc $\forall x \in [0,a]$ , $|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{a^3}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme de plus, la majoration est uniforme, alors :

$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } [0,+\infty[ \text{ vers } f}$

4°) $f_n(n) - f(n) = \frac{nsin(1)}{1+n} - \frac{n}{1+n} = \frac{nsin(1)-n}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} sin(1) - 1 \neq 0$

Si la convergence était uniforme sur $[0,+\infty[$, la limite ci-dessus serait nulle.

$\boxed{\text{La convergence de } (f_n) \text{ vers } f \text{ n'est donc pas uniforme sur } [0,+\infty[}$

5°) Le changement de variable $y = \frac{x}{n}$ donne : $u_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^2 sin(y)}{1+ny}dy = \int\limits_0^1 \frac{nsin(\frac{x}{n})}{1+x}dx = \int\limits_0^1 f_n(x)dx$

On a, en utilisant le 3°) que : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [0,1] \\ (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1] \end{cases}$ , on a donc, d'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}dx = \int\limits_0^1 (1 - \frac{1}{1+x})dx = 1 - ln(2)$

On a donc : $\boxed{\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^2 sin(y)}{1+ny}dy = 1 - ln(2)}$

# Exercice n°4

D'après le cours, pour $x \in ]-1,1[$ , $ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

Donc pour $x \in ]-1,1[\backslash\{0\}$ , $f(x) = \frac{ln(1+x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}$
On remarque que la formule est encore valable en $x = 0$ puisque $f(0) = 1$.
$f$ est donc développable en série entière sur $]-1,1[$ et par conséquent $C^\infty$ sur $]-1,1[$
Comme $f$ est $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions $C^\infty$ alors :

$\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } ]-1,+\infty[}$

# Problème : La fonction $\ln(\Gamma)$ (ccINP PC 2024 exo 2)

1. Soit $x > 0$, alors, au voisinage de $n = +\infty$ :
$u_n(x) = xln(1 + \frac{1}{n}) - ln(1 + \frac{x}{n}) = x(\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})) - (\frac{x}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = O(\frac{1}{n^2})$ (grantô)
Mais $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, donc par domination, $\sum u_n(x)$ est convergente.

On en déduit que : $\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } ]0, +\infty[}$

2. Pour $x \in ]0, +\infty[$ , $x + \frac{1}{n} > 0$, donc pas de problème avec le $ln$ et donc $u_n$ est $C^1$ comme composée de fonction $C^1$.

On a alors : $\forall x > 0$ , $u_n'(x) = ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+x}$

Posons alors : $\epsilon_n = u_n'(x) - \frac{x}{n(n+x)} = ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+x} - \frac{x}{n(n+x)} = ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{n+x}{n(n+x)} = ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$

Effectuons un développement asymptotique de $\epsilon_n$. Pour $n$ au voisinage de $+\infty$ :
$\epsilon_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{2n^2} < 0$
Donc $|\epsilon| \sim \frac{1}{2n^2}$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente par Riemann, alors, par équivalent, $\sum |\epsilon_n|$ est convergente, donc $\sum \epsilon_n$ est absolument convergente.

On a donc : $\boxed{(u_n)_{n\geq1} \text{ est une suite de fonctions de classe } C^1 \text{ sur } ]0, +\infty[, \text{ et il existe } (\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ telle que :}}$
$\boxed{\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times ]0, +\infty[ \text{ , } u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \epsilon_n}$

3. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$.

Soit $x \in [a, b]$
Alors : $|u_n'(x)| \leq \frac{|x|}{n(n+x)} + \epsilon_n \leq \frac{b}{n(n+a)} + \epsilon_n$
En passant au sup sur $x \in [a, b]$ on obtient :
$||u_n'||_\infty^{[a,b]} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + \epsilon_n$

$\frac{b}{n(n+a)} \sim \frac{b}{n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente par Riemann, donc, par équivalent $\sum \frac{b}{n(n+a)}$ est convergente.

Alors $\sum[\frac{b}{n(n+a)} + \epsilon_n]$ est convergente comme somme de deux séries convergentes, et par comparaison :
$\sum ||u_n'||_\infty^{[a,b]}$ est convergente.

On en déduit $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$.

Bilan : $\boxed{\sum u_n' \text{ converge uniformément sur tout segment de } ]0, +\infty[}$

4. • Avec Q14) et Q16) on a :
$$\begin{cases} \text{les fonctions } u_n \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } ]0,+\infty[ \\ \sum u_n \text{ converge simplement sur } ]0,+\infty[ \\ \sum u_n' \text{ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de } ]0,+\infty[ \end{cases}$$
On peut donc appliquer le théorème de classe $C^1$ pour les séries de fonctions et on en déduit que : $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$ , $\frac{d}{dx}(u_n(x)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$

Comme $x \mapsto ln(x)$ est aussi $C^1$ sur $]0,+\infty[$ alors $\varphi$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

• On a de plus : $\forall x > 0$ , $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$

On a déjà calculer $u_n'(x)$ et donc : $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+x}]$

Soit $(x,y) \in ]0,+\infty[$ , $0 < x < y$

Alors $\varphi'(y) - \varphi'(x)$

$= -\frac{1}{y} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+y}] - [-\frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+x}]]$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}]$ par convergence des séries

$= \frac{y-x}{xy} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\frac{y-x}{(n+x)(n+y)}]$ par convergence des séries

Donc comme $y - x > 0$ alors $\varphi'(y) - \varphi'(x) > 0$ et donc $\varphi'$ est croissante sur $]0,+\infty[$

• Soit $x > 0$. Alors :

$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \Big( - ln(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1)\Big) - \Big( - ln(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Big)$

Comme les séries sont convergentes :

$\varphi(x+1) - \varphi(x) = ln(x) - ln(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [u_n(x+1) - u_n(x)]$

Mais $u_n(x+1) - u_n(x)$

$= [(x+1)ln(1+\frac{1}{n}) - ln(1+\frac{x+1}{n})] - [xln(1+\frac{1}{n}) - ln(1+\frac{x}{n})]$

$= ln(1+\frac{1}{n}) - ln(1+\frac{x+1}{n}) + ln(1+\frac{x}{n})$

$= ln(1+\frac{1}{n}) - ln(\frac{n+x+1}{n}) + ln(\frac{n+x}{n})$

$= ln(1+\frac{1}{n}) - ln(\frac{n+x+1}{n+x})$

$= ln(\frac{n+1}{n}) - ln(\frac{n+x+1}{n+x})$

$= [ln(n+1) - ln(n)] - [ln(n+x+1) - ln(n+x)]$

Donc $\sum\limits_{n=1}^{N} [u_n(x+1) - u_n(x)] = \sum\limits_{n=1}^{N} \Big( [ln(n+1) - ln(n)] - [ln(n+x+1) - ln(n+x)]\Big)$ donc par télescopage :

$\sum\limits_{n=1}^{N} [u_n(x+1) - u_n(x)] = ln(N+1) - ln(1) - (ln(N+x+1) - ln(1+x)) = ln(\frac{N+1}{N}) + ln(1+x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} ln(1+x)$

On a donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} [u_n(x+1) - u_n(x)] = ln(1+x)$

On reporte plus haut et on a : $\varphi(x+1) - \varphi(x) = ln(x) - ln(x+1) + ln(x+1) = ln(x)$

• $\varphi(1) = -ln(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1)$

Mais $u_n(1) = ln(n + \frac{1}{n}) - ln(n + \frac{1}{n}) = 0$ et donc $\varphi(1) = 0$

Bilan : $\begin{cases} \text{i)} & \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } ]0, +\infty[ \\ \text{ii)} & \forall x > 0 \ , \ \varphi(x+1) - \varphi(x) = ln(x) \\ \text{iii)} & \varphi' \text{ est croissante sur } ]0, +\infty[ \\ \text{iv)} & \varphi(1) = 0 \end{cases}$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est une solution de (C)}}$

5. On a pour $x > 0$ : $h(x+1) - h(x) = (\varphi(x+1) - \varphi(x)) - (g(x+1) - g(x))$ mais comme $\varphi$ et $g$ vérifie $(Cii)$ alors
$h(x+1) - h(x) = (-ln(x)) - (-ln(x)) = 0$ et donc $h(x+1) = h(x)$
Comme de plus par (Ci), $\varphi$ et $g$ sont $C^1$ alors $h$ est $C^1$ et ont peut dériver la relation ci-dessus pour obtenir : $h'(x+1) = h'(x)$

Donc : $\boxed{\forall x > 0 \ , \ h(x+1) = h(x) \text{ et } h'(x+1) = h'(x)}$

6. • Pour $x \in ]0, 1[$ et $p \in \mathbb{N}^*$ : $p \leq p + x \leq p + 1$, comme $\varphi'$ et $g'$ sont croissantes on a alors :

$$\begin{cases} \varphi'(p) \leq \varphi'(p+x) \leq \varphi'(p+1) \\ g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(p+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi'(p) \underbrace{\leq}_{\boxed{1}} \varphi'(p+x) \underbrace{\leq}_{\boxed{2}} \varphi'(p+1) \\ -g'(p+1) \underbrace{\leq}_{\boxed{3}} -g'(p+x) \underbrace{\leq}_{\boxed{4}} -g'(p) \end{cases}$$

Alors $\boxed{1} + \boxed{3}$ donne : $\varphi'(p) - g'(p+1) \leq \varphi'(p+x) - g'(p+x) = h'(p+x)$
et $\boxed{2} + \boxed{4}$ donne : $h'(p+x) = \varphi'(p+x) - g'(p+x) \leq \varphi'(p+1) - g'(p)$

On a donc, en combinant les deux inégalités obtenues :
$\boxed{\forall x \in ]0, 1] \ , \ \forall p \in \mathbb{N}^* \ , \ \varphi'(p) - g'(p+1) \leq h'(p+x) \leq \varphi'(p+1) - g'(p)}$

• De plus : $\varphi'(p) - g'(p+1) = \varphi'(p) - g'(p) + g'(p) - g'(p+1) = h'(p) + g'(p) - g'(p+1)$
Or $g(x) - g(x+1) = -ln(x)$ qui se dérive en $g'(x) - g'(x+1) = \frac{-1}{x}$
Reporté avec $x = p$ ci-dessus, on a : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \ , \ \varphi'(p) - g'(p+1) = h'(p) - \frac{1}{p}}$

• Comme ci-dessus : $\varphi'(p+1) - g'(p) = \varphi'(p+1) - \varphi'(p) + \varphi'(p) - g'(p) = [\varphi'(p+1) - \varphi'(p)] + h'(p)$

Mais $\varphi(x+1) - \varphi(x) = ln(x)$, donc $\varphi'(x+1) - \varphi'(x) = \frac{1}{x}$ , appliqué en $x = p$ et reporté ci-dessus :
$\varphi'(p+1) - g'(p) = \frac{1}{p} + h'(p)$

• Avec double inégalité trouvée en début de question, on a :
$h'(p) - \frac{1}{p} \leq h'(p+x) \leq h'(p) + \frac{1}{p}$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{p} \leq h'(p+x) - h'(p) \leq \frac{1}{p}$
$|h'(p+x) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$

On a donc : $\boxed{\forall x \in ]0, 1] \ , \ \forall p_i n \mathbb{N}^* \ , \ |h'(p+x) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}}$

7. On a vu en Q18) que : $\forall x > 0$ , $h'(x+1) = h'(x)$, donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , $h'(p+x) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$
En reportant ceci dans la dernière inégalité de Q19), on a : $|h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p}$
Comme on peut faire tendre $p$ vers $+\infty$ on a, par encadrement :
$|h'(x) - h'(1)| \leq 0$ donc $|h'(x) - h'(1)| = 0$ et donc $h'(x) = h'(1)$

$h'$ est donc constante sur $]0, 1]$, et comme $h'(x+1) = h'(x)$ sur $]0, +\infty[$ alors $\boxed{h' \text{ est constante sur } ]0, +\infty[}$

8. D'après Q20) : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ , $\forall x > 0$ , $h'(x) = \alpha$
En intégrant, on obtient : $\exists \beta \in \mathbb{R}$ , $h(x) = \alpha x + \beta$
Mais $\forall x > 0$ , $h(x+1) = h(x)$ donc $h(\mathbb{R}) = h([1, 2])$, et comme $h$ est continue (car $C^1$) sur $[1, 2]$, alors $h$ est bornée sur $[1, 2]$ donc sur $]0, +\infty[$.
On en déduit $\alpha = 0$ et il reste $h(x) = \beta$.
Comme $h(1) = \varphi(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$ (puisque $\varphi$ et $g$ vérifie $Civ$)) alors $h$ est nulle sur $]0, +\infty[$

On en déduit : $\boxed{\varphi = g}$

9. $u_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}ln(1 + \frac{1}{n}) - ln(1 + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}[ln(n + 1) - ln(n)] - ln(2n + 1) + ln(2n)$
Donc $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n(\frac{1}{2})$
$= \frac{1}{2}[ln(N + 1) - ln(1)] - ln(\prod\limits_{n=1}^{N}(2n + 1)) + ln(\prod\limits_{n=1}^{N}(2n))$
$= \frac{1}{2}ln(N + 1) - ln\Big(\frac{(2N+1)!}{\prod\limits_{n=1}^{N}(2n)}\Big) + ln(\prod\limits_{n=1}^{N}(2n))$
$= \frac{1}{2}ln(N + 1) - ln((2N + 1)!) + 2ln(\prod\limits_{n=1}^{N}(2n))$
$= \frac{1}{2}ln(N + 1) - ln((2N + 1)!) + 2ln(2^N N!)$
$= ln(\sqrt{N + 1}) - ln((2N)!) - ln(2N + 1) + 2ln(2^N N!)$

Donc : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^* , \ exp\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} u_n(\tfrac{1}{2})\Big) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}}$

10. Par définition : $\psi(1) = 0.ln(2) + \varphi(\frac{1}{2}) + \underbrace{\varphi(1)}_{=0} - \frac{1}{2}ln(\pi) = \varphi(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}ln(\pi)$

Or $\varphi(\frac{1}{2}) = -ln(\frac{1}{2}) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(\frac{1}{2})$

Il est temps d'utiliser Q22) avec la formule de Stirling :
$exp\Big(\sum\limits_{n=1}^{N} u_n(\frac{1}{2})\Big) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \sim \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{(2^N\sqrt{2\pi N}N^N e^{-N})^2}{\sqrt{2\pi(2N)}(2N)^{2N}e^{-2N}} \sim \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{4^N 2\pi N^{2N+1}e^{-2N}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{N}N^{2N}4^N e^{-2N}} \sim \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{\sqrt{\pi}N}{\sqrt{N}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
On en déduit donc $exp\Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(\frac{1}{2})\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
En prenant le $ln$ et en reportant dans le calcul de $\varphi(\frac{1}{2})$

$\varphi(\frac{1}{2}) = -ln(\frac{1}{2}) + ln(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = ln(2) + \frac{1}{2}ln(\pi) - ln(2) = \frac{1}{2}(ln(\pi)$

Donc $\psi(1) = \varphi(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}ln(\pi) = 0$

On a donc : $\boxed{\psi(1) = 0}$

11. Montrons que $\psi$ vérifie $(C)$

• i) Comme $\varphi$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$ alors par composition $\psi$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

$\psi$ vérifie i)

• ii) Soit $x>0$. Alors :

$\psi(x+1)-\psi(x)$
$= [(x+1-1)ln(2)+\varphi(\frac{x+1}{2})+\varphi(\frac{(x+1)+1}{2})-\frac{1}{2}ln(\pi)]-[(x-1)ln(2)+\varphi(\frac{x}{2})+\varphi(\frac{x+1}{2})-\frac{1}{2}ln(\pi)]$
$= ln(2)+\varphi(\frac{x+1}{2})+\varphi(\frac{x}{2}+1)-\varphi(\frac{x}{2})-\varphi(\frac{x+1}{2})$
$= ln(2)+\varphi(\frac{x}{2}+1)-\varphi(\frac{x}{2})$ mais $\varphi$ vérifie $(C)$
$= ln(2)+ln(\frac{x}{2})$
$= ln(2)+ln(x)-ln(2)$
$= ln(x)$

$\psi$ vérifie ii)

• iii) Calculons $\psi'$ pour $x>0$ : $\psi'(x)=ln(2)+\frac{1}{2}\varphi'(\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\varphi'(\frac{x+1}{2})$

Mais $x\mapsto\frac{x}{2}$, $x\mapsto\frac{x+1}{2}$ et $\varphi'$ sont croissante, donc $\psi'$ est croissante.

$\psi$ vérifie iii)

• iv) est vérifiée par $\psi$ par la question Q23).

On a donc $\psi$ vérifie $(C)$ et par unicité : $\psi=\varphi$

Donc $\forall x>0\ ,\ \psi(x)=\varphi(x)$
$\Leftrightarrow (x-1)ln(2)+\varphi(\frac{x}{2})+\varphi(\frac{x+1}{2})-\frac{1}{2}ln(\pi)=\varphi(x)$
$\Leftrightarrow (x-1)ln(2)+\varphi(\frac{x}{2})+\varphi(\frac{x+1}{2})=\varphi(x)+\frac{1}{2}ln(\pi)$

On a donc : $\boxed{\forall x>0\ ,\ (x-1)ln(2)+\varphi(\frac{x}{2})+\varphi(\frac{x+1}{2})=\varphi(x)+\frac{1}{2}ln(\pi)}$

# Centrale PC mathématiques 2 , 2018 : début du sujet

Q1) $\sum \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, on sait d'après le cours qu'elle converge si et seulement si $x > 1$.

On en déduit : $\boxed{D_\zeta = ]1, +\infty[}$

Q2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\begin{array}{cccc} u_n & : & ]1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{1}{n^x} \end{array}$

On a alors : $\forall x \in D_\zeta$ , $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers $\zeta$ sur $D_\zeta$

Soit $a > 1$. Posons $N_{a,\infty}(u_n) = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)|$ alors $N_{a,\infty}(u_n) = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}$

Comme $a > 1$, on a $\sum N_{a,+\infty}(u_n)$ qui est convergente et donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et donc converge uniformément sur $[a, +\infty[$

On a donc $\begin{cases} \text{les fonctions } u_n \text{ sont continues sur } [a,+\infty[ \\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge uniformément vers } \zeta \text{ sur } [a,+\infty[ \end{cases}$

On en déduit par le théorème de transfert de continuité pour les séries de fonctions que $\zeta$ est continue sur $[a, +\infty[$

On a, pout tout $a > 1$, $\zeta$ est continue sur $[a, +\infty[$, comme $\bigcup\limits_{a>1} [a, +\infty[ = ]1, +\infty[ = D_\zeta$ on en déduit alors : $\boxed{\zeta \text{ est continue sur } D_\zeta}$

Q3) Soit $x, y \in D_\zeta$. Alors :
$x < y \Rightarrow xln(n) \leq yln(n) \Rightarrow n^x \leq n^y \Rightarrow \frac{1}{n^y} \leq \frac{1}{n^x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

En sommant de $n = 1$ à $+\infty$, comme les séries convergent, on obtient : $x < y \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \Rightarrow \zeta(y) \leq \zeta(x)$

On a donc : $\boxed{\zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$

Q4) Clairement, $\zeta$ est minorée par 0 sur $D_\zeta$, comme de plus $\zeta$ est décroissante alors on sait que : $\boxed{\zeta \text{ admet une limite en } +\infty}$

Q5) Soit $x \in D_\zeta$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$
Alors $x > 1$ et $[n-1, n+1] \subset ]0, +\infty[$ et donc $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n-1, n+1]$

Donc : $\forall t \in [n, n+1]$ , $\frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$.

On peut intégrer cette inégalité sur $[n, n+1]$, donc : $\int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$

De même : $\forall t \in [n-1, n]$ , $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{t^x}$.

On peut intégrer cette inégalité sur $[n-1, n]$, donc : $\frac{1}{n^x} \leq \int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt$

En regroupant les deux inégalités précédentes, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \ , \ \forall x \in D_\zeta \ , \ \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int\limits_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt}$

Q6) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2$. Alors en sommant de $n = 2$ à $n = N$ la double inégalité de Q5), on a pour $x \in D_\zeta$ :

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt$$

Par la relation de Chasles : $\int_{2}^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \int_{1}^{N-1} \frac{1}{t^x} dt$

Comme on sait, par Riemann que $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$ est convergente puisque $x > 1$ et que de plus $\zeta(x)$ est convergente, on a donc, en faisant tendre $N$ vers $+\infty$ :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \zeta(x) - 1 \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$$
$$\Rightarrow [\frac{1}{-x+1} t^{-x+1}]_2^{+\infty} \leq \zeta(x) - 1 \leq [\frac{1}{-x+1} t^{-x+1}]_1^{+\infty}$$

avec $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{-x+1} = 0$ puisque $x > 1 \Rightarrow -x+1 < 0$

Alors : $\frac{1}{x-1} 2^{-x+1} \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$ ce qui se réécrit : $\boxed{\forall x \in D_\zeta \ , \ \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} + 1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}}$

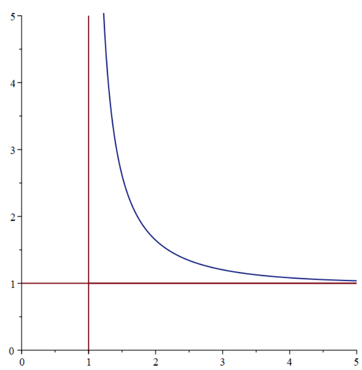
Q7) On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} 2^{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = 0$, donc, avec l'inégalité de gauche de Q6) on obtient :

$\boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty}$

Q8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} + 1 = 1$, donc par encadrement, avec la double inégalité de Q6) on obtient :

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1}$

Q9)




Q10) Si $x = -n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ alors $x + n = 0$ et on ne peut pas définir $\frac{1}{x+n}$ puisque l'on diviserai par 0.

Donc, si on note $-\mathbb{N}^* = \{-k \ , \ k \in \mathbb{N}^*\}$ on a : $-\mathbb{N}^* \cap D_f = \emptyset$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R} \backslash (-\mathbb{N}^*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \end{array}$

Si $x \notin -\mathbb{N}$ alors : $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1) = \frac{1}{n}(1 + O(\frac{1}{n}) - 1) = O(\frac{1}{n^2})$ (grantô)

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, alors, par domination $\sum f_n(x)$ est convergente.

Bilan : $\boxed{D_f = \mathbb{R} \backslash (-\mathbb{N}^*)}$ ou encore $D_f = \left( \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} ]-k-1, -k[ \right) \bigcup ]-1, +\infty[$

Q11) • $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)}$
On a $f_n$ dérivable sur son domaine $D_f$ et $\forall x \in D_f$ , $f_n'(x) = \frac{-1}{(n+x)^2}$
Donc $f_n$ est décroissante sur chaque intervalle de son domaine.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $D_f$.
On vient de voir que $f_n$ était décroissante sur $[a,b]$,
donc $\forall x \in [a,b]$ , $|f_n(x)| \leq max(|f_n(a)|, |f_n(b)|) \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$
On en déduit $||f_n||_\infty^{[a,b]} = \sup\limits_{[a,b]} |f_n(t)| \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$

Comme $a \in D_f$ et $b \in D_f$, alors avec Q10) on a : $\sum |f_n(a)|$ et $\sum |f_n(b)|$ sont convergentes.
Donc $\sum |f_n(a)| + |f_n(b)|$ est convergente et donc par comparaison, comme $||f_n||_\infty^{[a,b]} \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$ alors $\sum ||f_n||_\infty^{[a,b]}$ est convergente et donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

$\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues sur } [a,b] \\ \sum f_n \text{ converge normalement et donc uniformément sur } [a,b] \end{cases}$ donc, par le théorème de transfert de continuité pour les séries de fonctions, on a : $S$ continue sur $[a,b]$.

Comme $S$ est continue sur tout les segments de son domaine alors : $\boxed{f \text{ est continue sur } D_f}$

• Soit $I$ un intervalle inclu dans $D_f$.
On a déjà vu $f_n$ décroissante sur $I$, donc pour $(x,y) \in I$ :
$x < y \Rightarrow f_n(x) > f_n(y)$ et en sommant de $n = 1$ à $+\infty$, comme les séries convergent :
$x < y \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) > \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(y) \Rightarrow f(x) > f(y)$

On en déduit : $\boxed{f \text{ est décroissante sur chaque intervalle de son domaine.}}$

Remarque : attention, $f$ n'est pas décroissante sur $D_f$.

Q12) Soit $k \in \mathbb{N}$, on a donc $k \in D_f$ et $f(k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n})$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum\limits_{n=1}^{N} (\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n+k} - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum\limits_{p=k+1}^{N+k} \frac{1}{p} - \sum\limits_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \sum\limits_{p=N+1}^{N+k} \frac{1}{p} - \sum\limits_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$ par télescopage.

Comme $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{p=N+1}^{N+k} \frac{1}{p} = 0$ car c'est une somme FINIE de termes tendant vers 0, alors on a :

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ f(k) = -\sum\limits_{p=1}^{k} \frac{1}{p}}$

Q13) • Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $a_n = \left( \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - ln(n)$
Alors $a_{n+1} - a_n$
$= \frac{1}{n+1} - ln(n+1) + ln(n) = \frac{1}{n+1} + ln(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o(\frac{1}{(n+1)^2}) = -\frac{1}{2(n+1)^2} + o(\frac{1}{(n+1)^2}) \sim \frac{-1}{2n^2} < 0$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, par équivalent : $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est convergente.
Par lien suite-série, on a $(a_n)$ est convergente, donc $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ , $a_n = \gamma + o(1)$

En revenant à la définition de $a_n$ on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} ln(n) + \gamma + o(1)$ et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim ln(n)$

• $f$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc pour $x>1$, comme $\lfloor x\rfloor \leq x \leq \lfloor x\rfloor +1$ alors $f(\lfloor x\rfloor+1) \leq f(x) \leq f(\lfloor x\rfloor)$

En utilisant Q12) : $-\sum\limits_{p=1}^{\lfloor x\rfloor+1}\frac{1}{p} \leq f(x) \leq -\sum\limits_{p=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{p}$

$\Leftrightarrow -\sum\limits_{p=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{p} - \frac{1}{\lfloor x\rfloor+1} \leq f(x) \leq -\sum\limits_{p=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{p}$

Comme $\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $-\sum\limits_{p=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{p} \sim -ln(\rfloor x\lfloor) \sim -ln(x)$ alors on en déduit : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -ln(x)}$

Q14) • Vu la forme de $D_f$ on a directement $x\in D_h \Rightarrow x+k\in D_f$

$f(x+k)-f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+(x+k)}-\frac{1}{n}) - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n})$

Pour $N>12$ : $\sum\limits_{n=1}^{N}(\frac{1}{n+(x+k)}-\frac{1}{n}) - \sum\limits_{n=1}^{N}(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n})$

$= \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n+(x+k)} - \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n+x}$

$= \sum\limits_{p=k+1}^{N+k}\frac{1}{p+x} - \sum\limits_{p=1}^{N}\frac{1}{p+x}$

$= \sum\limits_{p=N+1}^{N+k}\frac{1}{p+x} - \sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p+x}$ par télescopage

Mais $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{p=N+1}^{N+k}\frac{1}{p+x} = 0$ comme somme finie de terme de limite nulle., donc $f(x+k)-f(x) = -\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p+x}$

On a donc : $\boxed{x\in D_h \Rightarrow x+k\in D_f \text{ et } f(x+k)-f(x) = -\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p+x}}$

Q15) De Q14) on déduit : $f(x) = f(x+k) + \sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p+x} = f(x+k) + \left(\sum\limits_{p=1}^{k-1}\frac{1}{p+x}\right) + \frac{1}{k+x}$

Comme $]-1,+\infty[\subset D_f$ alors, par Q11), $f$ est continue en 0 et donc $\lim\limits_{x\to-k} f(x+k) = f(0) = 0$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to-k}\sum\limits_{p=1}^{k-1}\frac{1}{p+x} = \sum\limits_{p=1}^{k-1}\frac{1}{p-k} \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) = \underbrace{f(x+k) + \sum\limits_{p=1}^{k-1}\frac{1}{p+x}}_{\underset{x\to-k}{\longrightarrow} cst\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{1}{k+x}}_{\underset{x\to-k}{\longrightarrow}\pm\infty}$

On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{x\to-k}{\sim} \frac{1}{x+k}}$

De l'équivalent ci-dessus, on déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-k^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-k^+} f(x) = +\infty}$

Q16) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$ d'après Q7) alors $|(-1)\zeta(k+1)| \sim 1$ et donc la série entière considérée a même rayon de convergence que $\sum x^k$ c'est-à-dire 1. On a donc $R = 1$.

Comme, avec la remarque ci-dessus $\sum(-1)^k\zeta(k+1)$ et $\sum\zeta(k+1)$ sont grossièrement divergentes alors, il n'y a pas convergence en $R$ et $-R$.

Bilan : $\boxed{R = 1 \text{ et il n'y a pas convergence en } \pm R}$

Q17) On a déjà vu que : $f_n'(x) = \frac{-1}{(n+x)^2}$. Par récurrence on a : $\forall k \geq 1\ ,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$
Comme dans Q11) on considère $[a,b]$ un segment inclus dans $D_f$.
Comme les $f^{(k)}$ sont monotone par intervalle, on a : $\left|\left|f_n^{(k)}\right|\right|_\infty^{[a,b]} = Max(\left|f_n^{(k)}(a)\right|, \left|f_n^{(k)}(b)\right|)$
Comme $\left|f_n^{(k)}(a)\right| \sim \frac{k!}{n^{k+1}} > 0$ et que $k+1$, on a, par comparaison à une série de Riemann $\sum \left|f_n^{(k)}(a)\right|$ est convergente.
Et donc, avec le calcul de $f_n^{(k)}$ ci-dessus, on a, $\forall k \geq 1\ ,\ \sum \left|\left|f_n^{(k)}\right|\right|_\infty^{[a,b]}$ convergente.
On a donc, $\forall k \geq 1$, les $f_n^{(k)}$ convergent uniformément (et donc simplement) sur $[a,b]$.

Donc, $\forall N \in \mathbb{N}^*$ , $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont de classe } C^N \text{ sur } [a,b] \\ \forall k \in [\![0; N-1]\!]\ ,\ \sum f_n^{(k)} \text{ convergent simplement sur } [a,b] \\ \sum f_n^{(N)} \text{ convergent uniformément sur } [a,b] \end{cases}$
On a donc $f$ de classe $C^N$ sur $[a,b]$.
Comme ceci est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout segment $[a,b]$ inclus dans $D_f$ alors on en déduit :

$$\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } D_f \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall x \in D_f\ ,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}}$$

Q18) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]-1,1[$. Alors : $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$

Par inégalité triangulaire : (et puisque $n + x \geq x - 1 > 0$) $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{k+1}}\right)$

En posant : $A = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{k+1}}$ on a donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall x \in ]-1,1[\ ,\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leq k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + A\right)}$$

Q19) On utilise la formule de Taylor avec reste intégrale.
$\forall x \in ]-1,1[\ ,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ avec $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Avec Q18) : $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left| \int\limits_0^x |x-t|^n (n+1)!(A + \frac{1}{(1+t)^{n+2}})dt \right|$

donc $|R_n(x)| \leq (n+1) \left| \int\limits_0^x |x-t|^n (A + \frac{1}{(1+t)^{n+2}})dt \right|$

On distingue 2 cas :

Cas 1 : $x \in [0,1[$

Alors : $|R_n(x)| \leq (n+1)\int\limits_0^x (x-t)^n \underbrace{(A+\dfrac{1}{(1+t)^{n+2}})}_{\leq A+1} dt$

donc $|R_n(x)| \leq (n+1)\int\limits_0^x |x-t|^n\,(A+1)dt = (n+1)(A+1)[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}]_0^x = (A+1)x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc par comparaison : $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Cas 2 : $x \in ]-1,0[$

Alors : $|R_n(x)| \leq (n+1)\int\limits_x^0 (t-x)^n(A+\frac{1}{(1+t)^{n+2}})dt = (n+1)A\int\limits_x^0 (t-x)^n dt + (n+1)\int\limits_x^0 (t-x)^n \frac{1}{(1+t)^{n+2}}dt$

On a facilement : $\int\limits_x^0 (t-x)^n dt = [\frac{-(t-x)^{n+1}}{n+1}]_x^0 = \frac{-(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

D'autre part : $(n+1)\int\limits_x^0 (t-x)^n \frac{1}{(1+t)^{n+2}}dt = (n+1)\int\limits_x^0 \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n \underbrace{\frac{1}{(1+t)^2}}_{\leq \frac{1}{(1+x)^2}} dt \leq \frac{n+1}{(1+x)^2}\int\limits_x^0 \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^n dt$

Mais $0 \leq \frac{t-x}{1+t} \leq \frac{t}{1-x}$ donc, en reprenant le calcul ci-dessus :

$(n+1)\int\limits_x^0 (t-x)^n \frac{1}{(1+t)^{n+2}}dt \leq \frac{n+1}{(1+x)^2}\int\limits_x^0 \left(\frac{t}{1-x}\right)^n dt \leq \frac{1}{(1+x)^2}\frac{|x|^{n+1}}{(1-x)^n} = \frac{-x}{(1+x)^2}(\frac{-x}{1-x})^n$

Etudions $\phi : x \mapsto \frac{-x}{1-x}$ sur $[-1,0]$

$\phi$ est dérivable sur $[-1,0]$ et $\phi'(x) = \frac{-1(1-x)+(-x)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2} \leq 0$

On a donc $\phi$ décroissante sur $[-1,0]$ de $\phi(-1) = \frac{1}{2}$ à $\phi(0) = 0$ et donc $0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{2}$

Donc, on a alors : $(n+1)\int\limits_x^0 (t-x)^n \frac{1}{(1+t)^{n+2}} \leq \frac{n+1}{(1+x)^2}\int\limits_x^0 (\frac{1}{2})^n dt \leq \frac{(n+1)|x|}{2^n(1+x)^2}$

En regroupant tout çà : $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} + \frac{(n+1)|x|}{2^n(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Bilan des deux cas : $\forall x \in ]-1,1[\ ,\ R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Puisque : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$ alors on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

Mais d'après Q17) : $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$ et donc $f^{(k)}(0) = (-1)^k k! \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = (-1)^k k!\zeta(k+1)$

On a donc : $\boxed{\forall x \in ]-1,1[\ ,\ f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^k k!\zeta(k+1)x^k}$