

Chapitre 14 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 14.1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? dans $M_2(\mathbb{C})$? Si oui, diagonaliser A .

Correction

1) Calcul du polynôme caractéristique de A

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A .

$$\text{Alors } \chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 + 1$$

2) Recherche du spectre de A

$$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow (X-2)^2 = -1 \Leftrightarrow (X-2)^2 = I^2 \Leftrightarrow X = 2+i \text{ ou } X = 2-i$$

χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc A n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

$$\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \text{ donc } \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2+i, 2-i\}$$

A admet deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} et $A \in M_2(\mathbb{C})$ donc A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$

3) Recherche des sous-espaces propres de A

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{2+i}(A) = \ker(A - (2+i)I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = ix$$

On a donc $E_{2+i}(A) = \text{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Comme A est réelle : $Ae_1 = (2+i)e_1$ donne en conjuguant $A\bar{e}_1 = (2-i)\bar{e}_1$

On en déduit $E_{2-i}(A) = \text{Vect}(\bar{e}_1)$

4) Diagonalisation de A

A est diagonalisable. On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement de bases on a :

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}}$$

Enoncé, Exercice 14.2

Diagonaliser dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

Correction

1) Calcul du polynôme caractéristique de A

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A .

$$\text{Alors } \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-4 & -6 & 6 \\ -2 & X-5 & 4 \\ -3 & -6 & X+5 \end{vmatrix}$$

$$\text{On effectue } C_3 \leftarrow C_3 + C_2 : \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & -6 & 0 \\ -2 & X-5 & X-1 \\ -3 & -6 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{On effectue } L_2 \leftarrow L_2 - L_3 : \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & -6 & 0 \\ 1 & X+1 & 0 \\ -3 & -6 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{On fait un déterminant par blocs : } \chi_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} X-4 & -6 \\ 1 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 3X + 2)$$
$$\chi_A(X) = (X-1)(X-1)(X-2) = (X-1)^2(X-2)$$

2) Recherche du spectre de A

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc A est trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

$$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 2 \text{ donc } sp(A) = \{1; 2\}$$

On ne peut pas encore savoir si A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ à cause de la valeur propre double.

3) Recherche des sous-espaces propres de A

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) = \ker(A - I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y - 6z = 0 \\ 2x + 4y - 4z = 0 \\ 3x + 6y - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y - 2z = 0$$

On a donc $E_1(A) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) = \ker(A - 2I_2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + 6y - 6z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 6y - 7z = 0 \end{cases} \quad \text{On fait } L_1 - L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2x + 2z - 4z = 0 \\ 3x + 4z - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ 3z + 4z - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 3y = 2z \end{cases} \\ & \text{On a donc } E_2(A) = \text{Vect}(e_3) \text{ avec } e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4) Diagonalisation de A

$\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 + 1 = 3$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3 et $A \in M_3(\mathbb{R})$. On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement de bases on a :

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Enoncé, Exercice 14.3

$$\text{Trigonaliser } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

1) Calcul du polynôme caractéristique de A

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A .

$$\text{Alors } \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & 1 \\ 0 & X & 1 \\ -3 & 5 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$\text{On effectue } C_3 \leftarrow C_3 + C_2 + C_1 : \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 2 & X+1 \\ 0 & X & X+1 \\ -3 & 5 & X+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{On effectue } L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 - L_3 : \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -3 & 0 \\ 3 & X-5 & 0 \\ -3 & 5 & X+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{On fait un déterminant par blocs : } \chi_A(X) = (X+1) \begin{vmatrix} X+1 & -3 \\ 3 & X-5 \end{vmatrix} = (X+1)(X^2 - 4X + 4)$$

$$\text{On a donc } \boxed{\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2}$$

2) Recherche du spectre de A

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc A est trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 2$ donc $sp(A) = \{-1; 2\}$

On ne peut pas savoir si A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ à cause de la valeur propre double.

3) Recherche des sous-espaces propres de A

On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme -1 est valeur propre simple, alors $\dim(E_{-1}(A)) = 1$,

on a donc $E_{-1}(A) = Vect(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) = \ker(A - 2I_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 3x - 5y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = y \end{cases}$$

On a donc $E_2(A) = Vect(e_2)$ avec $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) Trigonalisation de A

$\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_2(A)) = 1 + 1 = 2 < 3$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$, donc A n'est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 2 et $A \in M_3(\mathbb{R})$.

Remarque : le programme de *PSI* stipule qu'aucune méthode de trigonalisation n'est à connaître.

A partir d'ici, vous êtes donc sensés être aidé.

Il est bon de comprendre ce que l'on fait dans les deux méthodes suivantes.

Formons la réunion des bases des sous-espace propres : on a (e_1, e_2) qui est libre. Il nous manque un vecteur pour faire une base, ou autrement dit, une colonne pour notre matrice de passage P . Il nous manque aussi la troisième colonne de $P^{-1}AP \dots$

Méthode 1 : On complète la base "au hasard"

Posons $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B' = (e_1, e_2, e_3)$ et P la matrice de la famille B' dans B .

Alors : $\det_B(B') = \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ donc B' est une base de \mathbb{R}^3 .

Par construction on a déjà : $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$

Cherchons à écrire Ae_3 dans la base B' .

$$Ae_3 = ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ a + b = 0 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

On a donc $Ae_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$. On a déjà vu : $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$

Par la formule de changement de bases on a donc :

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On part de T ...

Cherchons $e_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $Ae_3 = 2e_3 + e_2$

$$Ae_3 = 2e_3 + e_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)e_3 = e_2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b - c = 1 \\ -2b - c = 1 \\ 3a - 5b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 - 2b \\ 3a - 5b + 1 + 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 - 2b \\ 3a - 3b = -3 \end{cases}$$

On peut par exemple choisir : $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Posons $B' = (e_1, e_2, e_3)$ et P la matrice de la famille B' dans B .

$$\text{Alors : } \det_B(B') = \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

donc B' est une base de \mathbb{R}^3 (on a fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$).

On a donc $Ae_3 = e_2 + 2e_3$, $Ae_1 = -e_1$ et $Ae_2 = 2e_2$ et B' est une base.

Par la formule de changement de bases on a donc :

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Enoncé, Exercice 14.4

Déterminer les suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 8u_n - 9v_n \\ v_{n+1} = 4u_n - 4v_n \end{cases}$

Correction

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a donc $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

Soit P_A le polynôme caractéristique de A .

$$\text{Alors } P_A(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-8 & 9 \\ -4 & X+4 \end{vmatrix} = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$$

Comme $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

On pense donc à poser $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ On remarque que : $N^2 = (0)$

Comme I_2 et N commutent alors :

$$A^n = (2I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (2I_2)^{n-k} = 2^n I_2 + n2^{n-1} N$$

$$\text{On a donc } A^n = \begin{pmatrix} 2^n + 6n2^{n-1} & -9n2^{n-1} \\ 4n2^{n-1} & 2^n - 6n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Par récurrence on a facilement : $X_n = A^n X_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = u_0(2^n + 6n2^{n-1}) - 9v_0n2^{n-1} \\ v_n = 4u_0n2^{n-1} + v_0(2^n - 6n2^{n-1}) \end{cases} \text{ avec } (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$$

On a donc toutes les suites répondant au problème.

Enoncé, Exercice 14.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + 2A + 4I_n = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

- Montrer que A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ et n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$
 - Montrer que n est pair et que $\det(A) = 2^{n/2}$
 - Calculer $\text{tr}(A)$
-

Correction

a) Posons $P(X) = X^2 + 2A + 4$ qui est un polynôme annulateur de A .

Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$.

On peut donc écrire $P(X) = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ avec $\lambda = -1 + i\sqrt{3}$

Le spectre réel de A est donc vide et A n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

De plus P est polynôme annulateur de A , scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$

b) Comme A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

Comme A est à coefficients réels, ses racines sont conjuguées deux à deux, avec le même ordre de multiplicité.

On a alors $\chi_A(X) = (X - \lambda)^m (X - \bar{\lambda})^m$ et comme χ_A est de degré n alors $n = 2m$ et donc n est paire.

De plus A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda I_{n/2} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} I_{n/2} \end{pmatrix}$

On a donc $\det(A) = (\lambda \bar{\lambda})^m = (|\lambda|^2)^m = |\lambda|^{2m} = |\lambda|^n = 2^n$

Donc n est pair et $\det(A) = 2^n$

c) Avec le b) on a $\text{tr}(A) = m\lambda + m\bar{\lambda} = 2m\text{Re}(\lambda) = -m = \frac{-n}{2}$

On a $\text{tr}(A) = \frac{-n}{2}$

Enoncé, Exercice 14.6

Soit E un K espace vectoriel de dimension n . Soit f et g deux endomorphismes de E tels que : f et g commutent et f admet n valeurs propres distinctes.

Montrer que f et g sont simultanément diagonalisable, autrement dit qu'il existe une base de E formé de vecteurs, à la fois vecteur propre de f et de g .

Correction

f admet n valeurs propres en dimension n , donc d'après le cours, f est diagonalisable.

De plus, comme les valeurs propres sont simples, les sous-espaces propres sont de dimension 1 et on peut écrire : $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ } \ker(f - \lambda_i \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_i)$

On a alors $B = (e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ qui est une base de vecteurs propres de f avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ } f(e_i) = \lambda_i e_i$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a : $f(e_i) = \lambda_i e_i \Rightarrow g(f(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$

Comme $f \circ g = g \circ f$ on a encore : $f(g(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$ donc $g(e_i) \in \ker(f - \lambda_i \text{Id}_E) = \text{Vect}(e_i)$

Donc $\exists \mu_i \in K \text{ } g(e_i) = \mu_i e_i$

On a donc $M_B(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $M_B(g) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

B est une base diagonalisant simultanément f et g .