

Chapitre 13 : Exemples d'exercices corrigés

Enoncé, Exercice 13.1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall P \in E$, $f(P) = (X + 2)P' + P$

1°) Montrer que f est un endomorphisme de E .

2°) Déterminer les éléments propres de f .

Correction

1°) Si $P \in E$ alors $d(P) \leq 2$, donc $d((X + 2)P') \leq 2$ et donc $d(f(P)) \leq 2$. On a bien $f(P) \in E$

Soient $P, Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(P + \lambda Q) = (X + 2)(P + \lambda Q)' + (P + \lambda Q) = (X + 2)P' + P + \lambda((X + 2)Q' + Q) = f(P) + \lambda f(Q)$$

On a donc f linéaire de E dans E : f est un endomorphisme de E .

2°) On cherche à résoudre $f(P) = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (paramètre) et $P \in E$ avec $P \neq 0$ (inconnue)

• Supposons que $\lambda \in sp(f)$, alors il existe $P \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(P) = \lambda P$

Donc $(X + 2)P' = (\lambda - 1)P$, en regardant le terme de degré n on a : $n = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = 1 + n \Rightarrow \lambda \in \mathbb{N}^*$

On a donc $sp(f) \subset \mathbb{N}^*$

• Réciproquement soit $\lambda = n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$

Cherchons un vecteur propre associé à λ sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k (X + 2)^k$

On remarquera le choix subtil de la base de $\mathbb{R}[X]$.

$$\text{Alors } f(P) = \lambda P$$

$$\Leftrightarrow (X + 2)P' + P = \lambda P$$

$$\Leftrightarrow (X + 2) \sum_{k=0}^n k a_k (X + 2)^{k-1} = (\lambda - 1) \sum_{k=0}^n a_k (X + 2)^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n [(k + 1 - \lambda) a_k] (X + 2)^k \text{ on rappelle que, ici, } \lambda = 1 + n$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, (k - n) a_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket, a_k = 0 \text{ puisque } k - 1 \neq 0 \text{ si } k < n$$

$$\Leftrightarrow P = a_n (X + 2)^n$$

On a donc trouver le sous espace propre associé $\lambda = 1 + n \in \mathbb{N}^*$ qui est dimension 1.

Donc $\mathbb{N}^* \subset sp(f)$

• Bilan : $sp(f) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $sp(f)$, $E_{n+1}(f) = Vect((X + 2)^n)$

Enoncé, Exercice 13.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ Trouver un polynôme annulateur de A , en déduire que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de I_3 et A .

Correction

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A . Alors $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 3 & X-2 & 0 \\ 0 & -2 & X+3 \end{vmatrix} \text{ on fait } C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 3 & X-2 & 0 \\ 0 & X+1 & X+3 \end{vmatrix} \text{ on développe par rapport à la première ligne :}$$

$$\chi_A(X) = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ X+1 & X+3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & X-2 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc } \chi_A(X) = (X-1)(X^2 + X - 6) - (3X + 3) = X^3 - 10X + 3$$

Par le théorème de Hamilton-Cayley on a donc $X^3 - 10X + 3$ qui est un polynôme annulateur de A .

$$A^3 - 10A + 3I_3 = 0 \Rightarrow A(A^2 - 10I_3) = -3I_3 \Rightarrow A \frac{A^2 - 10I_3}{-3} = I_3$$

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{10I_3 - A^2}{3}$

Enoncé, Exercice 13.3

Soit u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{C} espace vectoriel E de dimension finie et non nulle. On suppose que : $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Correction

Comme E est de dimension finie, on peut considérer le polynôme caractéristique χ_u de u , qui admet au moins une racine puisque c'est un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$.

u admet donc au moins une valeur propre λ . On note $F = \ker(u - \lambda Id_E)$ le sous espace propre de u associé à λ .

Alors $x \in F \Rightarrow u(x) = \lambda x \Rightarrow v(u(x)) = \lambda v(x) \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$ car u et v commutent

Donc $x \in F \Rightarrow v(x) \in F$ On a F est stable par v et on peut considérer $w = v|_F$ la restriction de v à F .

Comme $\dim(F) \geq 1$, on peut reprendre le raisonnement de ce début d'exercice pour montrer que w admet un vecteur propre $y \in F$.

Ce vecteur y est alors un vecteur propre de u (puisque'il est dans F) et un vecteur propre de v (car $w(y) = \mu y \Rightarrow v(y) = \mu y$)

On a donc démontré que : u et v ont un vecteur propre commun.