Feuille d'exercices fin d'année

e3a PC 2020

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?
3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e3a PC 2020

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.
2. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
   Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
   (c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.
   Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).
   (d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.
4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
   On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.
6. Justifier que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

e3a PSI 2019

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
   (a) Prouver que l'on a : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$
   (b) En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$
   (c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.
4. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.
   (a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.
   (b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.
   (c) Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)$

e3a MP 2020

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} ch\left(\frac{x}{k}\right),$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.
   (b) Démontrer que la fonction φ est continue sur J.
4. (a) Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{ch(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{ch}$.
   On pourra utiliser un changement de variable.
   (b) En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.