**Pour le jeudi 23 janvier 2025**

# Devoir à la maison n°9 de Mathématiques

## Exercice 1 : e3a PSI 2021, Exercice 1

On note $F$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J = ]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [[-1, p]]$, on définit les fonctions $f_k$ sur $J$ par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in [[0,p]],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. **Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

   1.1. Soit $(a_k)_{k\in[[-1,p]]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
   Démontrer que $a_{-1} = 0$.

   1.2. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k\in[[-1,p]]}$ est libre.
   On note $E = vect(\mathcal{B})$.

   1.3. En déduire la dimension de $E$.

2. On note $u$ l'application qui à toute fonction de $E$ associe la fonction $g$ définie sur $J$ par :

$$\forall x \in J,\ g(x) = (1+x) f'(x).$$

   2.1. Déterminer, pour $k \in [[-1,p]]$, les images de $f_k$ par $u$.

   2.2 Vérifier que $u$ est un endomorphisme de $E$.

   2.3. Déterminer le noyau et l'image de $u$.

   2.4. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de $f_{-1}$.

   2.5. Déterminer la matrice $M$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.

   2.6. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

   2.7. L'endomorphisme $u^2$ est il diagonalisable ?

3. Résoudre sur $J$ l'équation différentielle $(ED)$ : $f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.

4. Soit $h_2$ la solution de l'équation différentielle $(ED)$ nulle en 0.

   4.1. On note $h_3$ la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\, y'(t)$ nulle en 0.
   Expliciter $h_3$.

   4.2. En itérant le procédé, pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note $h_k$ la solution nulle en 0 de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.
   Expliciter $h_k$.

5. **Etude de la série de fonction $\sum\limits_{k\geq 2} h_k$**

   5.1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 2} h_k$ converge simplement sur $J$ et calculer sa somme $H$.

   5.2. La fonction $H$ est-elle dans $E$ ?

   5.3. En utilsant la question 5.1. vérifier que $H$ est dérivable et que $H' \in E$.

# Exercice 2 : e3a PSI 2021, Exercice 4

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u$ un endomorphisme de $E$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $m$ nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que $u$ est diagonalisable et que son spectre est $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.
   On rappele que dans ce cas $E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j$ où chaque $E_j$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_j$.
   Montrer qu'il existe une famille $(p_i)_{i\in[[1,m]]}$ de projecteur non nuls de $E$ tels que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j \qquad (*)$$

2. **Dans cette question, on ne suppose plus $u$ diagonalisable.**
   On suppose qu'il existe une famille $(p_j)_{j\in[[1,m]]}$ d'endomorphismes non nul de $E$ et que la famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[[1,m]]}$ vérifie $(*)$.

2.1. Vérifier que l'on a : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(u) = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, p_j$.

2.2. Montrer que $u$ est diagonalisable.
*On pourra chercher un polynôme annulateur de $u$ scindé à racines simples.*

2.3. Pour tout $j \in [[1, m]]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod\limits_{k\in[[1,m]],k\neq j} \dfrac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}$.

2.3.1. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [[1, m]]^2$, $L_j(\lambda_i)$.

2.3.1. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j\in[[1,m]]}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

2.3.2. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Déterminer les composantes de $P$ dans la base $\mathcal{B}$.

2.4. Prouver que l'on a : $\forall j \in [[1, m]],\ p_j = L_j(u)$.

2.5. Démontrer enfin que les $\lambda_j$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme $u$.

# Problème : ccINP PSI 2024, problème 2 : Blocs de Jordan

Soit $p$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $p$ à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les matrices $J_\lambda$, dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k$ tel que $M^k = 0$ est appelé l'indice de nilpotence de $M$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

On note $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E$, on définit :

$$\mathcal{N}(A) = \left( \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\| = \left( \sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

On admet que $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes respectivement sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $E$.

## Partie I - Irréductibilité de $J_\lambda$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $J_\lambda$.

1. Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et en déduire $J_0^2$.

   Calculer de même $J_0^{p-1}$ et $J_0^p$. En déduire que $J_0$ est nilpotente d'indice $p$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que $V$ est stable par $u_\lambda$ si, et seulement si, $V$ est stable par $u_0$.

Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par $u_\lambda$, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note $\nu$ l'endomorphisme induit par $u_\lambda$ sur $V$ et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ une base de $V$, que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

1. Quelle est la forme de la matrice de $u_\lambda$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ ?
2. En déduire que le polynôme caractéristique de $\nu$ divise le polynôme caractéristique de $u_\lambda$ et que $e_p \in V$.
3. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^p = V \oplus W$ où $V$ et $W$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par $u_\lambda$ non réduits à $\{0\}$.

### Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda X.$$

Une solution de $(S)$ est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe $C^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = J_\lambda X(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille $p$ notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

1. Montrer que si $X_0$ est un vecteur propre pour $J_\lambda$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors $\tilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de $(S)$.
2. On définit la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$.

   Montrer que $\varphi$ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda$.
3. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$.

   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.
4. Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de $(S)$ si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda)X(t)$ est constante.
   En déduire que les solutions de $(S)$ sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)X_0$ où $X_0 \in E$.
5. Montrer que si $\lambda > 0$, $(S)$ admet une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$, on a $\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\,\|X\|$.
   En déduire que si $\lambda < 0$, toutes les solutions de $(S)$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
7. Que dire concernant l'existence de solutions de $(S)$ non bornées sur $\mathbb{R}_+$ si $\lambda = 0$ ?

# FIN

---

## Problème : Mines-Ponts 2022, mathématiques 2 matrices de Hurwitz