Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°8

EXERCICE n°1

a) On pose $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) = cos(ln(1+\frac{1}{n}))\frac{2^n+n^2+n}{8^n}z^{2n+3}$
Pour $z=0$, $\sum u_n(z)$ est convergente car $u_n(z)=0$ pour $n \geq 1$.
Pour $z \neq 0$: $|a_n| \sim 1 \times \frac{2^n}{8^n}z^{2n+3} \sim \frac{|z|^{2n+3}}{4^n} \sim |z|^3\,(\frac{|z|^2}{4})^n >0$

$\sum(\frac{|z|^2}{4})^n$ est alors une série géométrique de raison $\frac{|z|^2}{4}$ convergente si et seulement si $\frac{|z|^2}{4} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$
Par la règle de l'équivalent : $\sum u_n(z)$ convergente $\Leftrightarrow |z| < 2$ (valable aussi en $z=0$)

On en déduit que $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum(-1)^n\frac{sin(n)+2^n}{8^n}z^{2n+1} \text{ vaut } R=2}$

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ on pose $u_n(z) = \binom{2n}{n}z^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$. Alors $u_n(z) \neq 0$ et
$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{((2n+2)!z^{n+1}}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!z^n}\right| = \left|\frac{(2n+2)(2n+1)z}{(n+1)^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |4z|$

Par la règle de D'Alembert : $\begin{cases} |z| < \frac{1}{4} \Rightarrow |4z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| < 1 \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ est convergente} \\ |z| > \frac{1}{4} \Rightarrow |4z| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| > 1 \Rightarrow \sum u_n(z) \text{ est divergente} \end{cases}$

Donc $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum\frac{n!}{(2n)!}z^n \text{ vaut } R=\frac{1}{4}}$

c) On distingue deux cas.

CAS 1 : $|a| \leq 1$
Alors $\frac{a^n+n}{n+1} \sim 1$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries entières : $\sum\frac{a^n+n}{n+1}z^n$ a même rayon de convergence que $\sum 1z^n$ qui est une série entière du cours de rayon de convergence 1.

CAS 2 : $|a| > 1$
Alors $\frac{a^n+n}{n+1} \sim \frac{a^n}{n}$ donc par la règle de l'équivalent pour les séries entières : $\sum\frac{a^n+n}{n+1}z^n$ a même rayon de convergence que $\sum\frac{a^n}{n}z^n$.
Par dérivation, cette série entière a même rayon de convergence que : $\sum a^nz^n = \sum(az)^n$
On reconnaît une série géométrique de raison az, convergente si et seulment si $|az| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{|a|}$
Le rayon de convergence de $\sum\frac{a^n+n}{n+1}z^n$ vaut alors $R=\frac{1}{|a|}$ $(a \neq 0)$

Bilan : Le rayon de convergence de $\sum\frac{a^n+n}{n+1}z^n$ vaut : $\boxed{R = \begin{cases} \frac{1}{|a|} \text{ si } |a| > 1 \\ 1 \text{ si } |a| \leq 1 \end{cases}}$

On peut résumer ceci en $\boxed{R = Min(1, \frac{1}{|a|})}$

EXERCICE n°2

1°) Pour $x \neq 0$ au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{1-cos(x^2)}{x^4} = \frac{1-(1-\frac{x^4}{2}+o(x^4))}{x^4} = \frac{1}{2} + o(1)$
Si on pose $\lambda = \frac{1}{2}$ alors on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\boxed{\text{Il faut donc donner à } \lambda \text{ la valeur } \frac{1}{2} \text{ pour que } f \text{ soit continue en 0.}}$

2°) On sait d'après le cours que : $\forall X \in \mathbb{R} \;\; cos(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n X^{2n}}{(2n)!}$

On a alors pour $x \neq 0$ (en posant $X = x^2$) :

$$f(x) = \frac{1-\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!}}{x^4} = \frac{1-1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}}{x^4} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-4}}{(2n)!} = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} x^{4p}}{(2p+2)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{4p}}{(2p+2)!}$$

On remarque que la relation ci-dessus est valable sur $\mathbb{R}$, y compris en $x = 0$ (à cause de la valeur choisie pour λ au 1°))
On a donc f développable en série entière en 0, de rayon de convergence $+\infty$, et on a donc que :
$\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

Autour de la fonction Zéta alternée de Riemann : (d'après ccINP MP 2008)

1°) • $\zeta(x)$ est une série de Riemann, on sait donc que $\zeta(x)$ est convergente si et seulement si $x > 1$.
Le domaine de ζ est donc bien $]1, +\infty[$
De plus, on a alors $x > 1 \Rightarrow F(x)$ est absolument convergente et donc $x \in D_F$ avec D_F le domaine de F.
• Si $x \leq 0$ alors $\frac{(-1)^n}{n^x}$ ne tend pas vers 0 et on a alors $F(x)$ divergente et donc $x \notin D_F$
• Si $x \in]0, 1[$, la série $F(x)$ est alternée, $(\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, on a donc par le théorème spécial que $F(x)$ est convergente.

On a donc $\boxed{\text{Le domaine de définition de } F \text{ est } D_F =]0, +\infty[}$

2°) Comme $(-1)^{n-1} = \underbrace{(-1)^2}_{=1}(-1^{n-1} = (-1)^{n+1}$, on a directement avec le résultat donné dans l'énoncé :
$\boxed{F(1) = ln(2)}$

3°) • Posons : $\forall x \in D_F \;,\; \forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$.
On a alors : $\forall x \geq 2 \;,\; \forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$
Donc $||f||_{[2,+\infty[,\infty} = \sup\limits_{x \in [2,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente alors, par la règle de comparaison pour les sériés à termes positifs, $\sum ||f||_{[2,+\infty[,\infty}$ est convergente et donc
$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [2, +\infty[\text{ vers } F.}$

• De plus $\forall n \geq 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$
On peut appliquer le théorème de la double limite car la convergence normale implique la convergence uniforme et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 1$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1}$

4°) a) Soit $x > 0$. On pose $\forall t > 0$, $a(t) = \frac{ln(t)}{t^x}$
Alors a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et : $a'(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{t^x} + ln(t)\frac{-x}{t^{x+1}} = \frac{1-xln(t)}{t^{x+1}}$

$1 - xln(t) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq ln(t) \Leftrightarrow exp(\frac{1}{x}) \leq t$

On a donc $t \mapsto \frac{ln(t)}{t^x}$ décroissante sur $[exp(\frac{1}{x}), +\infty[$

La suite $\boxed{(\frac{ln(n)}{n^x})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc décroissante à partir du rang } \lfloor exp(\frac{1}{x})\rfloor + 1}$

4°) b) • f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \frac{(-1)^{n-1}}{exp(ln(n)x)} = (-1)^{n-1}exp(-ln(n)x)$
Donc $f'_n(x) = (-1)^{n-1}(-ln(n))exp(-ln(n)x) = \frac{(-1)^n ln(n)}{n^x}$

• Soit $a > 0$. Posons $n_a = \lfloor exp(\frac{1}{a})\rfloor + 1$.
Comme $x \mapsto exp(\frac{1}{x})$ est décroissante, on a, d'après le 4°) a) , que $(\frac{ln(n)}{n^x})_{n\geq n_a}$ est décroissante pour tout $x \geq a$
Comme de plus : $f'_k(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, par le théorème spécial à certaines séries alternées on a que :
$\forall x \geq a$, $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} f'_n(x)$ est convergente et en posant : $\forall n \geq n_a$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)$ on a :
$\forall n \geq n_a$, $|R_n(x)| \leq \left|f'_{n+1}(x)\right| = \frac{ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{ln(n+1)}{(n+1)^a}$

On a alors : $||R_n||_{[a,+\infty[,\infty} \leq \frac{ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on en déduit que :

$\boxed{\forall a > 0 \text{ , } \sum f'_n \text{ converge donc uniformément sur } [a, +\infty[}$

• Soit $a > 0$. On a : $\begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ sont } C^1 \text{ sur } [a, +\infty[\\ \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement vers } F \text{ sur } [a, +\infty[\\ \sum f'_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[\end{cases}$ donc, par le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, on a que F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et que :
$\forall x \geq a$, $F'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$

Comme de plus $\bigcup\limits_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$ alors on a :

$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \geq 0 \text{ , } F'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)}$

5°) Pour $x > 1$ on a :
$F(x) - \zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{n^x}$

Comme la série est absolument convergente, on peut séparer les termes d'indice pair, et les termes d'indice impair (sommation par paquets) et on en déduit :

$F(x) - \zeta(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1-1}-1}{(2k+1)^x} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k-1}-1}{(2k)^x} = 0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{2^x k^x}$

$F(x) - \zeta(x) = \frac{-2}{2^x}\zeta(x)$ et en isolant $F(x)$ on a : $\boxed{\forall x > 1 \text{ , } F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)}$

• On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$ et donc : $\zeta(x) \sim F(x)$ au voisinage de $+\infty$, et compte tenu de la question 3°) on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$

6°) a) Si $x>1$ alors on a déjà vu que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est absolument convergente.

On sait, d'après le cours que l'on peut faire le produit de Cauchy de deux séries absolument convergente et on a : $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}c_n(x)$

Et donc : $\boxed{\forall x>1,\ \sum\limits_{n=2}^{+\infty}c_n(x) \text{ est convergente et } \sum\limits_{n=2}^{+\infty}c_n(x)=F(x)^2}$

6°) b) • Par définition, rappelée dans l'énoncé, pour $n\geq 2$:

$c_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k^x}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^x}=(-1)^n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{[k(n-k)]^x}$

Donc : $|c_n(x)|=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{[k(n-k)]^x}$

• Etudions : $\phi:t\mapsto t(n-t)$ sur $[0,n]$. ϕ est dérivable et $\phi'(t)=(n-t)-t=n-2t)$

On a donc le tableau de variation :

t	0		$n/2$		n
$\phi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\phi(t)$	0	$\nearrow$	$\phi(n/2)$	$\searrow$	0

avec $\phi(n/2)=\frac{n^2}{4}$

Donc : $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\frac{1}{[k(n-k)]^x}=\frac{1}{\phi(k)]^x}\geq\frac{1}{(\frac{n^2}{4})^x}=\frac{4^x}{n^{2x}}$

En reportant ci-dessus : $|c_n(x)|\geq\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{4^x}{n^{2x}}=\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$

On a donc : $\boxed{|c_n(x)|\geq\frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}}$

• $0<x\leq\frac{1}{2}\Rightarrow 0<2x\leq 1\Rightarrow\frac{1}{n^{2x}}\geq\frac{1}{n}$ et, reporté ci-dessus : $|c_n(x)|\geq 4^x\frac{n-1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}4^x>0$, donc $|c_n(x)|$ ne tend pas vers 0 et donc $\boxed{\sum|c_n(x)| \text{ est grossièrement divergente pour } 0<x\leq\frac{1}{2}}$

7°) a) • On a : $\boxed{\frac{1}{X(n-X)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{n-X}\right)}$

• On reprend du 6°) b), comme $x=1$:

$c_n(x)$

$=(-1)^n\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}$

$=\frac{(-1)^n}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}]$

$=\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right)$ changement d'indice $p=n-k$ dans la deuxième somme

$=\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum\limits_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}\right)$

On a donc : $\boxed{c_n(x)=\frac{2(-1)^nH_{n-1}}{n}}$

7°) b) $\frac{H_{n-1}}{n}-\frac{H_n}{n+1}=\frac{(n+1)H_{n-1}-nH_n}{n(n+1)}$

Mais $H_n=H_{n-1}+\frac{1}{n}$ donc : $\frac{H_{n-1}}{n}-\frac{H_n}{n+1}=\frac{(n+1)H_{n-1}-n(H_{n-1}+\frac{1}{n})}{n(n+1)}=\frac{H_{n-1}-1}{n(n+1)}=\frac{\sum\limits_{p=2}^{n-1}\frac{1}{p}}{n(n+1)}\geq 0$ (pour $n\geq 2$)

Donc $\boxed{\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2} \text{ est décroissante.}}$

7°) c) Comme $H_n\sim ln(n)$ alors $\frac{H_{n-1}}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc , avec le 7°)b) et le 7°a), on peut applique le théorème spécial à $\sum c_n(1)$ et en déduire : $\boxed{\sum c_n(1) \text{ est convergente.}}$

8°) a) F est de classe C^1 au voisinage de 1 (voir 4°) donc, par la formule de Taylor-Young on a, pour h au voisinage de 0 : $F(1+h)=F(1)+hF'(1)+o(h)$
Comme, par le 2°) $F(1)=ln(2)$ on a alors : $\boxed{\text{pour } h \text{ au voisinage de } 0 : F(1+h)=ln(2)+F'(1)h+o(h)}$

8°) b) Pour h au voisinage de 0, en posant $x=1+h$:
$1-2^{1-x}=1-2^{-h}=1-exp(-hln(2))=1-(1-hln(2)+\frac{(ln(2))^2}{2}h^2+o(h^2))=hln(2)-\frac{(ln(2))^2}{2}h^2+o(h^2)$

On a donc $\boxed{1-2^{1-x}=hln(2)-\frac{(ln(2))^2}{2}h^2+o(h^2)}$

8°) c) On compile a) et b) avec la relation du 5°) : $\forall x>1$, $F(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\zeta(x)\\
&=\frac{1}{1-2^{1-x}}F(x)\\
&=\frac{1}{hln(2)-\frac{(ln(2))^2}{2}h^2+o(h^2)}[ln(2)+F'(1)h+o(h)]\\
&=\frac{1}{hln(2)}\frac{1}{1-\frac{ln(2)}{2}h+o(h)}[ln(2)+F'(1)h+o(h)]\\
&=[\frac{1}{h}+\frac{F'(1)}{ln(2)}+o(1)](1+\frac{ln(2)}{2}h+o(h))\\
&=\frac{1}{h}+\frac{ln(2)}{2}+\frac{F'(1)}{ln(2)}+o(1)
\end{aligned}$$

On a la forme voulue et pour x au voisinage de 1^+, on a : $\boxed{\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{ln(2)}{2}+\frac{F'(1)}{ln(2)}+o(1)}$

9°) a) Pour $x\in[1,2]$ on a : $t\mapsto\frac{1}{t^x}$ qui est décroissante sur $[n,n+1]$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) donc :
$\forall t\in[n,n+1]$, $\frac{1}{(n+1)^x}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{n^x}$ En intégrant entre $t=n$ et $t=n+1$:

$$\frac{1}{(n+1)^x}\leq\int\limits_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{n^x}\Rightarrow-\frac{1}{n^x}\leq-\int\limits_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\leq-\frac{1}{(n+1)^x}\Rightarrow 0\leq\frac{1}{n^x}-\int\limits_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}$$

On a donc : $\boxed{0\leq v_n(x)\leq\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}}$

9°) b) Par téléscopage, $\sum\limits_{n=1}^{N}(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x})=1-\frac{1}{(N+1)^x}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1$, donc $\sum(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x})$ est une série convergente.
Avec l'inégalité du a), on a, par règle de comparaison pour les séries à termes positifs que : $\sum v_n(x)$ est convergente.

On a donc $\boxed{\text{pour } x\in[1,2] \text{ , } \sum v_n(x) \text{ convergente.}}$

9°) c) Pour $x \in]1,2]$

$\sum\limits_{n=1}^{N} v_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum\limits_{n=1}^{N} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \int\limits_{1}^{N+1} \frac{1}{t^x} dt = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - [\frac{1}{-x+1} t^{-x+1}]_1^{N+1}$

($x \neq 1$ pour le calcul de la dérivée)

$\sum\limits_{n=1}^{N} v_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - [\frac{1}{(-x+1)(N+1)^{x-1}} - \frac{1}{-x+1}]$

Si on fait tendre N vers $+\infty$ (puisque les convergences sont assurées), on obtient,(avec $x > 1$) :

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}}$

9°) d) En sommant la relation du a) de $N+1$ à $+\infty$ on a, comme au 7°)b) :

$\forall x \in [1,2]\ ,\ 0 \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{N+1}$

Comme $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$ (indépendamment de x) alors

$\boxed{\sum v_n \text{ converge uniformément sur } [1,2]}$

9°) e) • On a : $\forall x \in]1,2]\ ,\ v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}})$

$v_n(1) = \frac{1}{n} - ln(n+1) + ln(n)$

La continuité des v_n est évidente sur $]1,2]$. Montrons là en $x = 1$. Pour $h > 0$ au voisinage de 0 :

$v_n(1+h) - v_n(1)$

$= \frac{1}{exp((1+h)ln(n))} - \frac{1}{h}(\frac{1}{exp(hln(n))} - \frac{1}{exp(hln(n+1))}) - \frac{1}{n} + ln(n+1) - ln(n)$

$= \frac{1}{ln(n)} + o(1) - \frac{1}{h}(1 - hln(n) + o(1) - (1 - hln(n+1) + o(1))) - \frac{1}{n} + ln(n+1) - ln(n)$

$= \frac{1}{ln(n)} - \frac{1}{h}(hln(n) - hln(n+1) + o(1)) - \frac{1}{n} + ln(n+1) - ln(n)$

$= o(1)$

Donc $\lim\limits_{h \to 0^+} v_n(1+h) = v_n(1)$ et donc v_n est continue en $x = 1$.

• Comme les v_n sont continue sur $[1,2]$ et que $\sum v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ on a alors $\sum v_n$ continue sur $[1,2]$

En particulier, pour x au voisinage de 1^+ : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1) + o(1)$

En utilisant le 7°)c) et la notation γ : $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \gamma + o(1)$ et donc

$\boxed{\text{pour } x \text{ au voisinage de } 1^+ : \zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)}$

10°) On regroupe le résultat du 7°)e) et celui du 6°)c). On obtient, pour x au voisinage de 1^+ :

$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{ln(2)}{2} + \frac{F'(1)}{ln(2)} + o(1) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$

donc par unicité du développement limité : $\frac{ln(2)}{2} + \frac{F'(1)}{ln(2)} = \gamma \Rightarrow F'(1) = ln(2)\gamma - \frac{(ln(2))^2}{2}$

Comme dans le 4°)b) on a démontré que :

$\forall x \geq 0\ ,\ F'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n ln(n)}{n^x}$ alors on a finalement :

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n ln(n)}{n} = ln(2)\gamma - \frac{(ln(2))^2}{2}}$ ou encore $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} ln(n)}{n} = -ln(2)\gamma + \frac{(ln(2))^2}{2}}$