Feuille d'exercices n°39 : Chapitre 15

Exercice 327. *a) Soit* $p \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $a(x) = x^p$
Montrer que $\forall k \in [\![0; p]\!] \quad a^{(k)}(x) = \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k}$ *Que dire de* $a^{(k)}(x)$ *pour* $k > p$
b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $b(x) = (1-x)^p$ *Déterminer pour* $k \in \mathbb{N}$ *l'expression de* $b^{(k)}(x)$
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = x^n(1-x)^n$
Montrer que $c^{(n)}(x) = n! \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}^2 (1-x)^{n-p} x^p$
d) Calculer $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$

Exercice 328. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on définit l'application* f_n *de* $I =]0; +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*
$\forall x \in I \quad f(x) = x^{n-1} ln(1+x)$
a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $\forall x \in I \quad h(x) = x^p$
Déterminer $h^{(k)}(x)$ *pour tout* k *de* $\mathbb{N}^*$
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in I \quad f_n^{(n)}(x) = (n-1)! \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+x)^k}$

Exercice 329. *On cherche les fonctions de classe* C^1 *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :* $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$
Résoudre ce problème en posant $z(t) = x(t) + iy(t)$

Exercice 330. *On pose* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.
a) Calculer le polynôme caractéristique de A *et en déduire que* A *admet deux valeurs propres* λ *et* μ *telles que :* $\lambda < \mu$.
Soit e_1 *le vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ *ayant sa première coordonnées égale à 1.*
Soit e_2 *le vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* μ *ayant sa première coordonée égale à 1.*
b) Déterminer e_1 *et* e_2.
On pose $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
c) Montrer que $B' = (e_1, e_2, e_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$
On note B *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* φ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *admettant* A *comme matrice relativement à* B.
d) Déterminer la matrice de φ *relativement à* B'.
e) Trigonaliser A.
f) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) + z(t) \\ z'(t) = 6x(t) - 6y(t) - 2z(t) \end{cases}$

Exercice 331. *Déterminer les solutions réelles bornées des systèmes différentiel suivants :*
$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = y(t) + z(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases}$ *et* $\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 5y(t) - z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) - z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 5y(t) \end{cases}$