

Feuille d'exercices n°38 : Chapitre 15

Exercice 320. (changement de variable)

On considère l'équation différentielle : $E \Leftrightarrow x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$ que l'on cherche à résoudre sur $I =]0; +\infty[$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \exp(t)$

a) Montre que φ est une bijection de classe C^2 de \mathbb{R} dans J , intervalle que l'on précisera.

Donner l'expression de φ^{-1} et vérifier que φ^{-1} est de classe C^2 sur son domaine J

Supposons que y soit une solution de E .

b) Montrer que l'on peut définir sur \mathbb{R} une fonction g telle que $g(t) = y(\varphi(t))$ et que g est C^2

c) Donner une équation différentielle F vérifiée par g .

d) Résoudre F puis résoudre E

Exercice 321. Ricatti

On cherche à résoudre l'équation différentielle : $E \Leftrightarrow y'(x) = y(x)^2 - 2xy(x) + x^2$

a) Montrer que $Y(x) = x + 1$ définit une solution particulière de E .

b) Poser $y = Y + z$ et déterminer une équation différentielle F vérifiée par z .

c) Résoudre F en posant $Z = \frac{1}{z}$.

Exercice 322. (★)

On cherche à résoudre sur $I =]0; +\infty[$ l'équation différentielle :

$E \Leftrightarrow xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 0$

a) Effectuer le changement de fonction inconnue $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$ et déterminer F une équation différentielle vérifiée par z .

b) Résoudre F en effectuant le changement de variable $u = x^2$.

c) Résoudre E .

Exercice 323. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\exp(x)}{1+\exp(2x)}$

a) Etudier la parité de f

b) Tracer la représentation graphique de f

Exercice 324. Déterminer les fonctions réelles définies sur \mathbb{R} vérifiant :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$

Exercice 325. a) Rappeler la définition de la fonction partie entière notée $t \mapsto [t]$

b) Soit la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = t^2(t - [t])$

c) f est-elle continue en 0 ?

d) f est-elle dérivable en 0 ?

e) Quels sont les points de discontinuité de f ?

f) Aux points de discontinuité, autre que 0, f est-elle dérivable à gauche ? à droite ?

g) Tracer l'allure de la représentation graphique de f

Exercice 326. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de :

$f(t) = (\ln(1 + \sin(t)), \cos((1 + t)^{\frac{1}{3}} - 1))$