Feuille d'exercices n°37 : Chapitre 15

Exercice 311. *On considère la série entière :* $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n$
a) Déterminer la rayon de convergence R *de cette série entière.*
b) Touver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f *sur* $]-R, R[$.
c) En déduire une expression de f *sur* $]-R, R[$ *à l'aide des fonctions usuelles.*
d) Que dire de f *en* R *et en* $-R$ *?*

Exercice 312. *Trouver les solutions à valeurs réelles définie sur* $\mathbb{R}$ *de :* $\begin{cases} 2y''(x) + y'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 313. *Trouver les solutions à valeurs réelles définie sur* $\mathbb{R}$ *de :*
$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = sin^2(x)$

Exercice 314. *Trouver les solutions à valeurs réelles définie sur* $\mathbb{R}$ *de :* $\begin{cases} y''(x) + y'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 315. *Trouver les solutions à valeurs réelles définie sur* $\mathbb{R}$ *de : a)* $y''(x)+3y'(x)+2y(x) = 0$
b) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = xe^x$ *c)* $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = xe^{-x}$
d) $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = cos(x)$ *e)* $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = cos(x) + xe^x$

Exercice 316. *Trouver les fonction* f *à valeurs réelles, définie sur* $\mathbb{R}$ *et vérifiant :*
$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) - f'(-x) = 0$

Exercice 317. *On pose* $I =]0; +\infty[$.

A) On considère l'équation différentielle suivante :
$E_1 \Leftrightarrow x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$
On cherche les solutions à valeurs réelles de E_1.
a) Chercher une solution y_p *sous la forme :* $y_p : x \mapsto x^\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$
b) Chercher les solutions de E_1 *sous la forme* $y : x \mapsto \lambda(x)y_p(x)$ *et résoudre* E_1

B) On considère l'équation différentielle suivante :
$E_2 \Leftrightarrow x^2y''(x) + 2xy'(x) - 2y(x) = 0$
On cherchera les solutions à valeurs réelles.
a) Chercher des solutions sous la forme : $x \mapsto x^\alpha$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Résoudre E_2.

Exercice 318. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :* $ty''(t) - (2t+1)y'(t) + 2y(t) = 0$, *en cherchant les solutions développable en série entière en* 0.

Exercice 319. *(changement de fonction inconnue)*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ *:* $E \Leftrightarrow (1+e^x)y''(x) + 2e^xy'(x) + (2e^x+1)y(x) = xe^x$ *en effectuant le changement de fonction inconnue :* $z(x) = (1+e^x)y(x)$