Feuille d'exercices n°36 : Chapitre 15

Exercice 300. *a) Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle :* $E_a \Leftrightarrow y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+e^x}$
b) Résoudre sur $]-1;+\infty[$ *l'équation différentielle :* $E_b \Leftrightarrow (1+t)y'(t) + y(t) = 1 + ln(1+t)$
c) Résoudre sur $]0;+\infty[$ *l'équation différentielle :* $E_b \Leftrightarrow ty'(t) - 2y(t) = t^3$

Exercice 301. *Résoudre le problème de Cauchy sur* $]-1;+\infty[$ *:* $\begin{cases} (1+x)y'(x) + xy(x) = x^2 - x + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$
On pourra chercher une solution particulière polynomiale.

Exercice 302. $(\star)$
Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{\alpha+x}{1+x^2}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 303. *Soit* $E \Leftrightarrow t^2y'(t) - y(t) = 0$
a) Résoudre E *sur* I *un intervalle ne contenant pas* 0
On cherche maintenant à résoudre E *sur* $\mathbb{R}$ *c'est-à-dire à trouver les fonctions* y*, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et vérifiant* E *pour* $t \in \mathbb{R}$
b) Trouver une solution évidente au problème posé.
Supposons maintenant que y *soit une solution de* E *sur* $\mathbb{R}$
c) Cacluler $y(0)$
d) A l'aide du a), exprimer y *à l'aide de deux constantes.*
e) En écrivant que y *est continue en 0, trouver une des deux constantes.*
f) Réciproquement, montrer que les fonctions trouvées au e) sont bien solution de E *sur* $\mathbb{R}$
g) Conclure l'exercice.

Exercice 304. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *:* $ty'(t) - 2y(t) = t^3$

Exercice 305. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *:* $(1-t)y' - y = t$

Exercice 306. $(\star)$
Résoudre sur $\mathbb{R}$ *:* $x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0$

Exercice 307. *(Python)*
On considère l'équation différentielle $E \Leftrightarrow y'(t) = sin(ty^3) + t$
Avec Python, et la méthode D'Euler, tracer les solutions de E*, pour* $t \in [-1;3]$*, vérifiant* $y(-1) = \alpha$ *avec une cinquantaine de valeurs de* α *équiréparties sur l'intervalle* $[0;4]$

Exercice 308. *Trouver les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $y'(x) + y(x) = y(0) + y(1)$

Exercice 309. *Trouver les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)dt$

Exercice 310. *(*$\star$*)*
Soit f *une fonction de classe* C^1 *vérifiant* $\lim_{x \to +\infty} f'(x) + f(x) = 0$
Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$