

# Chapitre 16 : Probabilité

## 1 Outils pour les probabilité

*Extraits du programme :*

- la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition

- l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés est hors programme  
Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est réservé au contexte probabiliste.

Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.

### 1.1 Ensembles dénombrables

#### 1.1.1 Rappel ensemble finie

On rappelle que  $I$  est un ensemble fini si il est en bijection avec  $\llbracket 1; n \rrbracket$  et que  $n$  est appelé **cardinal de  $I$**

On note  $n = \text{card}(I) = \#I$  et cet entier naturel est unique.

Par convention  $\text{card}(\emptyset) = 0$ .

On dit que  **$I$  est infinie si  $I$  n'est pas finie.**

On peut écrire  $I = \{x_i ; i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$  par extension.

#### 1.1.2 Ensembles dénombrables

**Définition.** Un ensemble  $I$  est dit **dénombrable si il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .**

**Remarques.** On dit qu'un ensemble dénombrable ou fini est **au plus dénombrable.**

Un ensemble dénombrable est un ensemble infini dont on peut numéroter les éléments.

Il peut s'écrire  $I = \{x_i ; i \in \mathbb{N}\}$  par extension.

#### 1.1.3 Exemples élémentaires

**Théorème .  $\mathbb{N}$  est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.**

preuve :

**Théorème .  $\mathbb{R}$  et  $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$  ne sont pas dénombrable.**

preuve : HP

#### 1.1.4 Propriétés

**Théorème .** Si  $E$  et  $F$  sont au plus dénombrables alors

$E \times F$  est **au plus dénombrable.**

Si  $F \subset E$  et si  $E$  est au plus dénombrable alors  $F$  est **au plus dénombrable.**

Si  $I$  est au plus dénombrable et si  $\forall i \in I, A_i$  est au plus dénombrable alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est **au plus dénombrable.**

## 1.2 Familles sommables

### 1.2.1 Définition

**Définition.** Une famille au plus dénombrable  $(x_i)_{i \in I}$  de réels **positifs** est dite **sommable** quand il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour toute partie finie  $J$  de  $I$  :  $\sum_{j \in J} x_j < M$

Dans ce cas on appelle somme de la famille et on note  $\sum_{i \in I} x_i$  la borne supérieure des valeurs  $\sum_{j \in J} x_j$  lorsque  $J$  parcourt l'ensemble des parties finies de  $I$ .

On a alors :  $\sum_{i \in I} x_i = \sup(\{\sum_{j \in J} x_j, J \text{ partie finie de } I\})$

**Remarque.** On autorise parfois la valeurs  $+\infty$  pour les  $x_i$  et on a alors  $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$

### 1.2.2 Généralisation

**Définition.** Une famille au plus dénombrable  $(x_i)_{i \in I}$  de complexes est dite **sommable si  $(|x_i|)_{i \in I}$  est sommable.**

**Remarque.** Si  $I = \mathbb{N}$  alors la sommabilité de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  équivaut à la convergence absolue de  $\sum u_n$

**Lemme.** Si pour tout  $i \in I$  on a :  $|x_i| \leq y_i$  alors la sommabilité de  $(y_i)_{i \in I}$  implique celle de  $(x_i)_{i \in I}$

### 1.2.3 Sommation par paquets

**Théorème .** Soit une famille au plus dénombrable  $(x_i)_{i \in I}$  de réels positifs, alors si l'on a une partition de  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$

(on a donc  $p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \emptyset$ ), alors :  $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} x_i$

preuve : HP

**Remarque.** On pourra utiliser d'autres propriétés comme la linéarité, la croissance, Fubini etc ... sans vraiment justifié ...

### 1.2.4 Exemple

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{2^p}{(q+p)!} = \dots$$

## 2 Espace probabilisable

### 2.1 Tribus

#### 2.1.1 Définition

**Définition.** Soit  $\Omega$  un ensemble appelé **univers**.  $\mathcal{P}(\Omega)$  désigne l'ensemble des parties de  $\Omega$ . On appelle **tribu sur  $\Omega$**  tout sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- stabilité par passage au complémentaire :  
si  $A \in \mathcal{A}$  alors  $\bar{A} \in \mathcal{A}$
- stabilité par union dénombrable : pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  on a  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Le couple  $(\Omega, \mathcal{A})$  est appelé **espace probabilisable**.

Tout élément de  $\mathcal{A}$  est appelé **événement**.

**Remarques.** On parle aussi de  $\sigma$  algèbre ...

On notera  $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega, x \notin A\}$ , le complémentaire de  $A$ , attention à la notation (rien à voir avec l'adhérence ici ...)

#### 2.1.2 Premiers exemples

**Théorème .** •  $(\Omega, \emptyset)$  est une tribu.

- $\mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu.
- Si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  alors  $(\Omega, \emptyset, A, \bar{A})$  est une tribu.

**Remarque.** Très souvent dans les exercices on utilise la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$

preuve :

#### 2.1.3 Propriétés

**Théorème .** Soit  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $\Omega$  alors :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- stabilité par intersection dénombrable : pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  on a  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$  est stable par union et intersection finie.
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

preuve :

## 2.2 Vocabulaire probabiliste

### 2.2.1 Définitions

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable au plus dénombrable que l'on écrit  $\Omega = \{\omega_k, k \in I\}$  avec  $I$  au plus dénombrable.

Alors :

- les singletons  $\{\omega_k\}$  sont appelés **événements élémentaires**.
- l'événement  $\Omega$  est appelé **événement certain**
- l'événement  $\emptyset$  est appelé **événement impossible**
- les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés **événement**

### 2.2.2 Événement contraire

**Définition.** Soit  $A$  un événement de  $\mathcal{A}$  alors on définit le complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$  par  $\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$ . On dit que  $\bar{A}$  est l'**événement contraire de  $A$** , c'est l'événement " $A$  ne se produit pas".

**Remarque.**  $\overline{\bar{A}} = A$

### 2.2.3 Union et intersection

**Définitions.** Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $\mathcal{A}$ . Alors :

$A \cup B$  est un événement appelé " **$A$  ou  $B$** "

$A \cap B$  est un événement appelé " **$A$  et  $B$** "

Si  $A \cap B = \emptyset$  alors on dit que  **$A$  et  $B$  sont incompatibles**

Si  $A \subset B$  on dit que **l'événement  $A$  implique l'événement  $B$ .**

### 2.2.4 Suite infinie d'événements

**Définitions.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite infinie d'événements de  $\mathcal{A}$ . Alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  et  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  sont des événements de

$$\mathcal{A} \text{ définis par : } \begin{cases} \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \omega \in A_{n_0} \\ \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \end{cases}$$

**Remarques.**  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  : **au moins un  $A_n$  est réalisé**

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  : **tous les  $A_n$  sont réalisés**

Pour se ramener à un nombre fini d'événements on peut prendre les  $A_n$  constant égaux à  $A_{n_0}$  à partir d'un certain rang.

### 2.2.5 Système complet d'événements

**Définition.** On dit qu'une suite infinie d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{A}$  est **un système complet d'événements** si et seulement si

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

**Remarque.** En général on choisit les  $A_n$  non vide.

**Cas particulier : système fini**

En prenant les  $A_p$  vide à partir du rang  $n + 1$  on obtient un système fini complet d'événements. On a alors :  $(A_p)_{p \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est un système complet d'événements si et seulement si

- $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{p \in \llbracket 1; n \rrbracket} A_p = \Omega$

**Remarque.** Si  $A$  est un événement alors  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements.

### 2.2.6 Lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste

Les opérations ensembliste correspondant à des propriétés logiques, les termes du langage probabiliste se retrouvent en langage ensembliste.

Langage probabiliste	langage ensembliste
Un résultat d'expérience	$\omega$ un élément de $\Omega$
événement élémentaire	$\{w\}$ un singleton de $\mathcal{A}$
événement	$A$ élément de $\mathcal{A}$
événement certain	$\Omega$
événement impossible	$\emptyset$
l'événement $A$ ne se produit pas	$\bar{A}$
événement $A$ ou $B$	$A \cup B$
événement $A$ et $B$	$A \cap B$
$A$ et $B$ sont incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
$A$ implique $B$	$A \subset B$
système complet d'événement	union disjointe

### 2.2.7 Exemples

Soit  $\Omega$  l'ensemble des résultats du lancer de deux dés. Exemples d'événements ...

Soit  $\Omega$  l'ensemble des tirages d'une suite infinie de Pile ou Face. Exemples d'événements, de tribus, ...

## 3 Probabilité

### 3.1 Cas fini : rappel de première année

#### 3.1.1 Définition

**Définition.** Soit  $\Omega$  un univers **fini**. On appelle **probabilité** sur  $\Omega$  toute application  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0; 1]$  vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour tout événements  $A$  et  $B$  **incompatibles** :  
 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

**Remarques.** On a pris  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  comme tribu (comme dans le programme de sup), c'est généralement ce que l'on fait sur un univers finis. (mais on peut prendre une autre tribu comme ci-dessous dans le cas général)  
La deuxième propriété est appelée **additivité**.

Sur un même univers il existe plusieurs probabilités, on dit que  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini.

#### 3.1.2 Cas particulier : probabilité uniforme

**Définition.** Si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  est un univers fini alors on peut définir sur  $\Omega$  une probabilité particulière appelée **probabilité uniforme** telle que :  $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$

On a alors  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

preuve :

**Remarque.** On parle aussi d'équiprobabilité.

**Exemple.** Si on lance un dé à 6 faces et que l'on considère tous les résultats comme équiprobable. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat pair.

### 3.2 Cas général

**Définition.** Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable au plus dénombrable.

On appelle **probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$**  toute application  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{A}$  dans  $[0; 1]$  vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **deux à deux incompatibles** :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

**Remarques.** La deuxième propriété s'appelle  **$\sigma$  additivité** et on a convergence de la série.

Sur un même univers il existe plusieurs probabilités, on dit que  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé.

La somme est indexée par  $n \in \mathbb{N}$  car comme on a une série de nombre positifs la série est absolument convergente et donc l'ordre de sommation n'a pas d'importance (cf cours sur les séries).

On a bien sûr :  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

### 3.3 Événements particuliers

**Définitions.** Soit  $\mathbb{P}$  une probabilité sur un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Soit  $A$  un événement de  $\mathcal{A}$ . Alors :  
 $A$  est dit **négligeable** si et seulement si  $\mathbb{P}(A) = 0$ .

$A$  est dit **presque sûr** si et seulement si  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

**Remarque.** Il peut y avoir d'autres événements presque sûr ou négligeable que  $\Omega$  ou  $\emptyset$ .

### 3.4 Exemples

#### 3.4.1 Germe de probabilité

**Théorème .** Soit  $\Omega = \{\omega_k, k \in \mathbb{N}\}$  un univers dénombrable. Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs tels que  $\sum p_n$  soit convergente et que  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ .

Alors il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ .

preuve : HP

#### 3.4.2 Exemple 1

#### 3.4.3 Exemple 2

### 3.5 Propriétés

**Propriété. 1 : Additivité finie**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un space probabilisé au plus dénombrable.

Soit  $A$  et  $B$  deux événements incompatibles, alors :  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

Plus généralement si  $(A_p)_{p \in \{1..n\}}$  est une union finie d'événements incompatibles alors :  $\mathbb{P}(\bigcup_{p=1}^n A_p) = \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p)$

preuve :

**Propriété. 2**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un space probabilisé au plus dénombrable.

Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \text{ (on dit que } \mathbb{P} \text{ est croissante)} \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array} \right.$$

preuve :

**Propriété. 3 Continuité croissante**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un space probabilisé au plus dénombrable.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que :  $\forall n \in \mathbb{N} A_n \subset A_{n+1}$ . Alors :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

preuve :

**Propriété. 4 : Continuité décroissante**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un space probabilisé au plus dénombrable.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que :  $\forall n \in \mathbb{N} A_n \supset A_{n+1}$ . Alors :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

preuve :

**Propriété. 5 : Sous additivité finie et infinie**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un space probabilisé au plus dénombrable.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements. Alors :  $\forall N \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^N A_n) \leq \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(A_n)$  et  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

preuve :

### 3.6 Exemple

## 4 Conditionnement

On considère dans cette section  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé au plus dénombrable. On retrouvera dans le cas finie les notions étudiées en sup, il s'agit ici de les généraliser.

### 4.1 Probabilités conditionnelles

#### 4.2 Définition

**Définition.** Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle. Soit  $A$  un événement de  $\mathcal{A}$ . Alors on appelle **probabilité de  $A$  sachant  $B$**  et on note  $\mathbb{P}_B(A)$  ou  $\mathbb{P}(A|B)$  la valeur suivante :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Remarques.**  $\mathbb{P}_B(A)$  est bien défini car  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

$\mathbb{P}(A|B)$  se lit : "probabilité de  $A$  sachant  $B$ ".

Attention à ne pas confondre  $A|B$  avec  $A \setminus B$  la différence ensembliste.

#### 4.3 Théorème

**Théorème .** Soit  $B$  un événement de probabilité non nulle. Alors :

l'application  $p_B$  de  $\mathcal{A}$  dans  $[0; 1]$  définie par :

$\forall A \in \mathcal{A}$  ,  $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  appelée **probabilité conditionnelle à  $B$** .

**Remarques.** Puisque  $\mathbb{P}_B$  est une probabilité alors :  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$  ,  $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$

Attention, ne pas confondre  $\mathbb{P}(A \cap B)$  et  $\mathbb{P}(A|B)$

preuve :

#### 4.4 Formule des probabilités composées

##### 4.4.1 Avec deux événements

**Théorème .** Soit  $A$  et  $B$  deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

preuve :

##### 4.4.2 Avec $n$ événements

**Théorème .** Soit  $n$  un entier supérieur ou égale à 2. Soit  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  une famille d'événements telle que :

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

preuve :

##### 4.4.3 Exemple

Les joueurs de l'ASSE descendent un par un du bus et de manière équiprobable. Il y a 7 droitiers et 4 gauchers. Quelle est la probabilité pour que les 3 premiers à sortir soit droitiers et que le quatrième soit gaucher ?

## 4.5 Formules des probabilités totales

### 4.5.1 Cas fini

**Lemme.** Soit  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  un système complet d'événements de probabilités non nulles (i.e.  $\forall k \in \llbracket 1..k \rrbracket \mathbb{P}(A_k) \neq 0$ ). Soit  $B$  un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

preuve :

### 4.5.2 Cas particulier important

Si on prend  $A$  un événement tel que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  et  $\mathbb{P}(A) \neq 1$  alors on peut appliquer le lemme précédent avec  $(A, \bar{A})$  et on obtient :  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})$

preuve :

### 4.5.3 Cas infini

**Lemme.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles (i.e.  $\forall k \in \mathbb{N} \mathbb{P}(A_k) \neq 0$ ). Soit  $B$  un événement. Alors **la série  $\sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$  est convergente et**

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

**Remarques.** Si on a une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements deux à deux incompatibles telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$  alors on dit que l'on a **un système quasi-complet d'événements** et la formule des probabilités totales ci-dessus reste valable.

Par convention, si  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  on pose  $\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = 0$ .

preuve :

### 4.5.4 Exemple

Dans un club de tennis, il y a deux fois plus de gauchers que de droitiers, un gaucher sur 4 a un revers à une main et un droitier sur deux a un revers à une main.

Quelle est la probabilité qu'un joueur ait un revers une main ?

## 4.6 Formule de Bayes ou formule de probabilités des causes

**Théorème .** Soit  $A$  et  $B$  deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

preuve :

**Remarques.** Cette formule permet (en quelque sorte) de remonter le temps.

On peut combiner formule de Bayes et formule des probabilités totales :

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles et  $B$  un événement quelconque. Alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

### 4.6.1 Exemple

Dans un lycée 40% des garçons et 15 % des filles mesurent plus de 1m80. Il y a 60% de fille. On prend aléatoirement un élève de plus d'1m80, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

## 4.7 Interprétation en terme d'arbres des formules du paragraphe

## 5 Indépendance

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

### 5.1 Indépendance de deux événements

**Définition.** (Rappel)

Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Alors  $A$  et  $B$  sont dit **indépendants** si et seulement si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

**Remarques.** En particulier si  $\mathbb{P}(B) \neq 0$  alors :

**$A$  et  $B$  sont indépendants**  $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$

De même si  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  alors :  $A$  et  $B$  sont indépendants  $\Leftrightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$

Indépendance et incompatibilité sont deux notions distinctes. L'indépendance dépend de la probabilité alors que l'incompatibilité est une notion uniquement ensembliste.

**Exemple. 1**

Si on tire de manière équiprobable une carte dans un jeu de 32.

On considère les événements :  $A$ =tirer un Roi et  $B$ =tirer un coeur

Alors  $A$  et  $B$  sont indépendants mais pas incompatible.

**Exemple. 2**

On lance deux fois une pièce qui a la probabilité  $p \in ]0; 1[$  de faire pile.

On considère  $A = \{PF; FF\}$  et  $B = \{PF; FP\}$

Alors l'indépendance de  $A$  et  $B$  dépend de  $p$  ...

### 5.2 Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements

**Définition.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille au plus dénombrable d'événements. Alors :

1. Les événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont **indépendants deux à deux** si et seulement si

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

2. Les événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont **mutuellement indépendants** si et seulement si pour tout sous ensemble fini  $J$  de  $I$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

**Remarque.** L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, la réciproque est fausse.

**Exemple.** Lancer deux fois d'une pièce équilibrée avec

$A = \{PF; PP\}$ ,  $B = \{PF; FF\}$  et  $C = \{PP; FF\}$  qui sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

### 5.3 Propriétés

**Propriété. 1**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements indépendants. Alors :  **$A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.**

preuve :

**Remarque.** On peut en déduire que  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

## Propriété. 2

Toute sous famille d'une famille mutuellement indépendante est mutuellement indépendante.

preuve :

## Propriété. 3

Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit  $p \in \{1..n-1\}$ . Alors :

$A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants

$A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants

$A_1 \cap \dots \cap A_p$  et  $A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$  sont indépendants

$A_1 \cup \dots \cup A_p$  et  $A_{p+1} \cap \dots \cap A_n$  sont indépendants

preuve :

# Sommaire

<b>1 Outils pour les probabilités</b>	<b>1</b>
1.1 Ensembles dénombrables	1
1.1.1 Rappel ensemble finie	1
1.1.2 Ensembles dénombrables	1
1.1.3 Exemples élémentaires	1
1.1.4 Propriétés	1
1.2 Familles sommables	2
1.2.1 Définition	2
1.2.2 Généralisation	2
1.2.3 Sommation par paquets	2
1.2.4 Exemple	2
<b>2 Espace probabilisable</b>	<b>3</b>
2.1 Tribus	3
2.1.1 Définition	3
2.1.2 Premiers exemples	3
2.1.3 Propriétés	3
2.2 Vocabulaire probabiliste	3
2.2.1 Définitions	3
2.2.2 Événement contraire	3
2.2.3 Union et intersection	4
2.2.4 Suite infinie d'événements	4
2.2.5 Système complet d'événements	4
2.2.6 Lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste	4
2.2.7 Exemples	5
<b>3 Probabilité</b>	<b>5</b>
3.1 Cas fini : rappel de première année	5
3.1.1 Définition	5
3.1.2 Cas particulier : probabilité uniforme	5
3.2 Cas général	5
3.3 Événements particuliers	5
3.4 Exemples	6
3.4.1 Germe de probabilité	6
3.4.2 Exemple 1	6
3.4.3 Exemple 2	6
3.5 Propriétés	6
3.6 Exemple	6
<b>4 Conditionnement</b>	<b>6</b>
4.1 Probabilités conditionnelles	7
4.2 Définition	7
4.3 Théorème	7
4.4 Formule des probabilités composées	7
4.4.1 Avec deux événements	7
4.4.2 Avec $n$ événements	7
4.4.3 Exemple	7
4.5 Formules des probabilités totales	7
4.5.1 Cas fini	7
4.5.2 Cas particulier important	8
4.5.3 Cas infini	8
4.5.4 Exemple	8
4.6 Formule de Bayes ou formule de probabilités des causes	8
4.6.1 Exemple	8
4.7 Interprétation en terme d'arbres des formules du paragraphe	8
<b>5 Indépendance</b>	<b>8</b>
5.1 Indépendance de deux événements	9
5.2 Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements	9
5.3 Propriétés	9