

Chapitre 15 : Equations différentielles linéaires scalaires fonction de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^n

Énoncé, Exercice 15.1

Résoudre sur $I =]-1; +\infty[$ l'équation différentielle : $Eq \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - (x-1)y(x) = 1$

Correction

On remarque que Eq est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, d'équation homogène associée :

$$E_0 \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - (x-1)y(x) = 0$$

Alors, comme sur I on a $x+1 \neq 0$, on a : $E_0 \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x-1}{x+1}y(x)$

$$\int \frac{x-1}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) dx = x - 2\ln(|x+1|) = x - 2\ln(x+1) \quad (\text{car } x+1 > 0 \text{ sur } I)$$

On sait alors d'après le cours que :

$$E_0 \Leftrightarrow y(x) = \alpha \exp(x - 2\ln(x+1)) \Leftrightarrow y(x) = \alpha \frac{e^x}{(x+1)^2} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre Eq on va utiliser la méthode de variation de la constante. On cherche donc les solutions de Eq sous la forme : $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$ avec $y_0(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

Ce changement de fonction inconnue est licite car $y_0(x) \neq 0$ sur I

$$\text{Alors } y'(x) = \lambda(x)y_0'(x) + \lambda'(x)y_0(x)$$

On a donc :

$$Eq \Leftrightarrow (x+1)y'(x) - (x-1)y(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\lambda(x)y_0'(x) + \lambda'(x)y_0(x)) - (x-1)\lambda(x)y_0(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x)[(x+1)y_0'(x) - (x-1)y_0(x)] + (x+1)\lambda'(x)y_0(x) = 1$$

Mais y_0 est solution de E_0 donc $(x+1)y_0'(x) - (x-1)y_0(x) = 0$ et donc

$$Eq \Leftrightarrow (x+1)\lambda'(x)y_0(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\lambda'(x) \frac{e^x}{(x+1)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) = (x+1)e^{-x} \text{ on fait une intégration par partie avec des fonctions } C^1$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x) = [-(x+1)e^{-x}] + \int e^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x) = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + \alpha \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x) = -(x+2)e^{-x} + \alpha \text{ mais } y(x) = \lambda(x)y_0(x)$$

$$\Leftrightarrow y(x) = (-(x+2)e^{-x} + \alpha) \frac{e^x}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2} + \alpha \frac{e^x}{(x+1)^2}$$

Bilan : Les solutions de Eq sur $] -1; +\infty[$ s'écrivent $y(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2} + \alpha \frac{e^x}{(x+1)^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Enoncé, Exercice 15.2

Trouver les fonctions y de classe C^∞ sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 169x \\ & y(0) = 0 \\ & y'(0) = 5 \end{cases}$$

Correction

On a une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et second membre continue avec conditions initiales. On notera E cette équation différentielle.

L'unicité de la solution est assurée par le théorème (de Cauchy) du cours.

L'équation homogène E_0 associée est $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$, comme elle est à coefficients constants, on peut considérer son équation caractéristique :

$$r^2 - 4r + 13 = 0 \text{ de } \Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$$

Les solutions conjuguées sont donc $r_1 = 2 + 3i$ et $r_2 = 2 - 3i$

Les solutions de E_0 s'écrivent donc $y(x) = \exp(2x)(A\cos(3x) + B\sin(3x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Vu la forme du second membre on va chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Alors : y_p solution de E sur \mathbb{R}

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad y_p''(x) - 4y_p'(x) + 13y_p(x) = 169x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 - 4(a) + 13(ax + b) = 169x \text{ or un polynôme nul à tous ses coefficients nuls}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 13b = 0 \\ 13a = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 4 \end{cases}$$

Une solution particulière de E est donc $y_p(x) = 13x + 4$

On a une équation différentielle **linéaire** donc la solution générale s'écrit comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Les solutions de E s'écrivent donc $y(x) = 13x + 4 + \exp(2x)(A\cos(3x) + B\sin(3x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Alors } y'(x) = 13 + 2\exp(2x)(A\cos(3x) + B\sin(3x)) + \exp(2x)(-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x))$$

donc $y'(0) = 13 + 2A + 3B$. On a aussi : $y(0) = 4 + A$

Les conditions initiales donnent donc :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + A = 0 \\ 13 + 2A + 3B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 0 \end{cases}$$

Finalement, notre problème de Cauchy admet une unique solution donnée par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 13x + 4 - 4e^{2x}\cos(3x)}$$

Enoncé, Exercice 15.3

Déterminer les solutions sur $I =]0; +\infty[$ de $E \Leftrightarrow x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$ en les cherchant sous la forme : $y(x) = x\lambda(x)$

Correction

Remarque préliminaire : E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène, à coefficients continue sur I (puisque $x \neq 0$ sur I) on sait donc que l'ensemble des solutions est un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension 2.

Posons $\forall x \in I$, $y_0(x) = x$.

Alors : $\forall x \in I$, $x^2 y_0''(x) - xy_0'(x) + y_0(x) = 0 - x + x = 0$,

y_0 est donc une solution particulière de E

Comme $y_0(x) \neq 0$ sur I on peut utiliser le changement de fonction inconnue :

$y(x) = \lambda(x)y_0(x) = x\lambda(x)$

Alors $y'(x) = \lambda(x) + x\lambda'(x)$ et $y''(x) = 2\lambda'(x) + x\lambda''(x)$

$E \Leftrightarrow \forall x \in I$, $x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $x^2(2\lambda'(x) + x\lambda''(x)) - x(\lambda(x) + x\lambda'(x)) + x\lambda(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $x^3\lambda''(x) + (2x^2 - x^2)\lambda'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $x\lambda''(x) + \lambda'(x) = 0$

On pose $A(x) = \lambda'(x)$ pour se ramener à une EDL_1

$E \Leftrightarrow \forall x \in I$, $A'(x) = \frac{-1}{x}A(x)$

$\int \frac{-1}{x} dx = -\ln(x)$ (car $x > 0$ sur I) et donc d'après le cours :

$E \Leftrightarrow \forall x \in I$, $A(x) = a \exp(-\ln(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $A(x) = \lambda'(x) = a \frac{1}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $\lambda(x) = a \ln(x) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, $y(x) = ax \ln(x) + bx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Bilan : les solutions de E sur I s'écrivent $y(x) = ax \ln(x) + bx$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Enoncé, Exercice 15.4

Calculer la dérivée nième de $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$

Correction

Déjà f est C^∞ sur \mathbb{R} .

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $a(x) = x^2 + 1$ et $b(x) = e^{2x}$

Alors a et b sont C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $b^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$

De plus $a'(x) = 2x$, $a''(x) = 2$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3 \Rightarrow a^{(k)}(x) = 0$

Par la formule de Leibniz on a $f = ab \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x)$

Avec les calculs précédents :

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) \\ = & \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} a^{(k)}(x) 2^{n-k} e^{2x} \\ = & (x^2 + 1)2^n e^{2x} + n(2x)2^{n-1} e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2}(2)2^{n-2} e^{2x} \\ = & (x^2 + 1)2^n e^{2x} + nx2^n e^{2x} + \frac{n(n-1)}{4}2^n e^{2x} \\ = & [(x^2 + 1) + nx + \frac{n(n-1)}{4}]2^n e^{2x} \\ = & [4x^2 + 4nx + (n^2 - n + 4)]2^{n-2} e^{2x} \end{aligned}$$

On remarque que la formule est valable pour $n \leq 2$ et donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = [4x^2 + 4nx + (n^2 - n + 4)]2^{n-2} e^{2x}$

Enoncé, Exercice 15.5

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes fixés. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(t) & \sin(t) \\ 1 & \cos(t + \alpha) & \sin(t + \alpha) \\ 1 & \cos(t + \beta) & \sin(t + \beta) \end{vmatrix}$

- Montrer que la fonction Δ est constante.
- En déduire une expression simple de $\Delta(t)$

Correction

a) Le déterminant est multilinéaire et les fonctions coordonnées de la matrice sont dérivables, donc Δ est dérivable. En utilisant le cours (on dérive les colonnes l'une après l'autre) :

$$\Delta'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & \cos(t + \alpha) & \sin(t + \alpha) \\ 0 & \cos(t + \beta) & \sin(t + \beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\sin(t) & \sin(t) \\ 1 & -\sin(t + \alpha) & \sin(t + \alpha) \\ 1 & -\sin(t + \beta) & \sin(t + \beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos(t) & \cos(t) \\ 1 & \cos(t + \alpha) & \cos(t + \alpha) \\ 1 & \cos(t + \beta) & \cos(t + \beta) \end{vmatrix}$$

Quand il y a deux colonnes égales (ou une colonne nulle) un déterminant est nul donc $\Delta'(t) = 0$

Comme on est sur un intervalle : Δ est constante.

b) D'après le a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \Delta(0)$ On développe par rapport à la première ligne.

$$\begin{aligned} \Delta(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 1 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \sin(\alpha) \\ 1 & \sin(\beta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta) - \sin(\alpha) = \sin(\beta - \alpha) + \sin(\beta) - \sin(\alpha) \end{aligned}$$

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(t) & \sin(t) \\ 1 & \cos(t + \alpha) & \sin(t + \alpha) \\ 1 & \cos(t + \beta) & \sin(t + \beta) \end{vmatrix} = \sin(\beta - \alpha) + \sin(\beta) - \sin(\alpha)$

Enoncé, Exercice 15.6

Résoudre le système différentielle suivant : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 6y(t) \end{cases}$

Correction

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ On a alors : $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Soit P_A le polynôme caractéristique de A .

$$P_A(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X - 1 & -2 \\ 3 & X - 6 \end{vmatrix} = X^2 - 7X + 12 = (X - 3)(X - 4)$$

$\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$ on en déduit $sp(A) = \{3; 4\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 3I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y \text{ donc } \ker(A - 3I_2) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 4I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3x + 2y = 0 \text{ donc } \ker(A - 4I_2) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

A est diagonalisable. On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres. Par la formule de changement de bases : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Alors : $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t)$. On multiplie à gauche par P^{-1} et on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$

$$\text{Donc } (S) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = 4v(t) \end{cases}$$

On a deux équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants homogène.

Donc d'après le cours : $\begin{cases} u(t) = a \exp(3t) \\ v'(t) = b \exp(4t) \end{cases}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$Y = P^{-1}X \Rightarrow X(t) = PY(t) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = a e^{3t} + 2b e^{4t} \\ y(t) = a e^{3t} + 3b e^{4t} \end{cases} \text{ On a bien les solutions du système cherché.}$$