Feuille d'exercices n°44 : Chapitre 16

Exercice 358. *($\star$)*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
On considère les événements $A =$"une infinité d'événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé et $B =$"il existe un certain rang à partir duquel tout les A_n sont réalisés.
a) Montrer que A et B sont des événements.
b) On suppose que les (A_n) sont mutuellement indépendant et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}$.
Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$

Exercice 359. *($\star$)*
Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face.
Au départ le joueur A possède a euros et le joueur B possède b euros avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
A chaque défaite le perdant donne 1 euro au gagnant. Le joueur A à une probabilité p de gagner à chaque lancer. Avec $p \in]0; 1[$ et $p \neq \frac{1}{2}$.
Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.
On pose $N = a + b$ et $q = 1 - p$. On note p_n la probabilité que le joueur A finisse ruiné s'il commence la partie avec n euros et q_n la probabilité que le joueur B finisse ruiné s'il commence la partie avec $N - n$ euros.
a) Montrer que si $0 < a < N$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$
b) En déduire l'expression de p_a en fonction de a, de p, de q et de N.
c) Calculer q_a puis $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?
d) Même chose avec $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 360. *On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un six.*
Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 361. *($\star$)*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
a) Soit A, B et C trois événements. Montrer que :
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
Montrer que : $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum\limits_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i})$

Exercice 362. *($\star$) On lance n fois une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant $p \in]0; 1[$.*
a) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier pile au $n^{ième}$ lancer ?
b) Pour $k \in [\![1..n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir le $k^{ième}$ pile au $n^{ième}$ lancer ?
Maintenant on considère que la pièce est équilibrée et on la lance $2n$ fois.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir n piles avant n faces ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir n piles avant $n + 1$ faces ?

Exercice 363. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne.*
Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Exercice 364. *On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'apparition de la séquence (Pile,Pile,Face) ?*