Pour le jeudi 30 janvier 2025

Devoir à la maison n°10 de Mathématiques

Exercice 1

On considère la série entière : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n$

a) Déterminer la rayon de convergence R de cette série entière.
b) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f sur $]-R, R[$.
c) En déduire une expression de f sur $]-R, R[$ à l'aide des fonctions usuelles.
d) Que dire de f en R et en $-R$?

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°) Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?
2°) Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?
3°) Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4°) Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = z(t) \\ z'(t) = y(t) \end{cases}$

Exercice 3

On dispose de deux pièces de monnaie différentiable , dénommées dans la suite de l'exercice "pièce 1" et "pièce 2". On effectue une série de n lancers indépendants, où $n \in \mathbb{N}^*$, avec l'une ou l'autre pièce, selon un protocole décrit ensuite.
Suivant les questions posées, l'entier n prendra différentes valeurs précisées dans l'énoncé.
On note Ω l'ensemble des séries de n lancers possibles.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on considère les événements suivants :
$P_i =$ "le i-ième lancer est effectué avec la pièce 1 et donne pile"
$F_i =$ "le i-ième lancer est effectué avec la pièce 1 et donne face"
$P'_i =$ "le i-ième lancer est effectué avec la pièce 2 et donne pile"
$F'_i =$ "le i-ième lancer est effectué avec la pièce 2 et donne face"
$L_i =$ "le i-ième lancer est effectué avec la pièce 1"
$L'_i =$ "le i-ième lancer est effectué avec la pièce 2"

On fixe, pour tout le problème, les réels p_1 et p_2 tels que : $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.
On suppose que les lancers sont indépendants et on a donc dans l'espace probabilisé (Ω, P) :

$$\begin{cases} P(P_i|L_i) = p_1 \\ P(P'_i|L'_i) = p_2 \\ P(F_i|L_i) = 1 - p_1 \\ P(F'_i|L'_i) = 1 - p_2 \end{cases}$$

Le protocole de lancer est le suivant : on choisit une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.
On effectue le premier lancer avec la pièce choisie. Si le résultat est pile, on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce pour le lancer suivant.
On itère le processus jusqu'au n-ième lancer en conservant la même pièce tant que le lancer donne pile et en changeant de pièce pour le lancer suivant lorsque l'on obtient face.

On note C l'événement "choisir la pièce 1 au premier lancer" et C' l'événement "choisir la pièce 2 au premier lancer".

Tous les résultats seront exprimés, sous la forme la plus simple possible, à l'aide de p_1 et de p_2.

0°) a) Expliquer rapidement pourquoi : $P(P_i|L'_i) = P(P'_i|L_i) = P(F_i|L'_i) = P(F'_i|L_i) = 0$
0°) b) Comparer L_1, L'_1 avec C, C'

1°) a) Rappeler la définition d'un système complet d'événements et montrer que (C, C') est un système complet d'événements.
1°) b) Montrer que $P(C) = P(C')$ et calculer cette valeur.

2°) a) Dessiner un arbre prenant en compte le choix de la pièce pour le premier lancer et l'issue du premier lancer.
2°) b) Déterminer, en la justifiant avec soin, la valeur de $P(P_1)$
2°) c) Déterminer de même les valeurs $P(F_1)$, $P(P'_1)$ et $P(F'_1)$.

3°) a) Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?
3°) b) On effectue le second lancer avec la pièce 1.
Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?

4°) Dans cette question on considère une série de 4 lancers ($n = 4$).
On considère les événements $A_1 = P_1 \cap F_2 \cap P'_3 \cap F'_4$ et $A_2 = P'_1 \cap F'_2 \cap P_3 \cap F_4$.
4°) a) A quoi correspond l'événement $A = A_1 \cup A_2$?
4°) b) Calculer $P(A)$

(B) 5°) Dans cette question on considère une série de n lancers, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On note D_n l'événement "on utilise la pièce 1 pour la première fois au n-ième lancer"
a) Déterminer $P(D_n)$ pour $n = 1$ et pour $n > 1$
b) Montrer que $\sum P(D_n)$ est convergente et calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(D_n)$
c) En supposant que l'on puisse effectuer une infinité de lancers, quelle est la probabilité de l'événement "ne jamais utiliser la pièce 1" ?