

Feuille d'exercices n°47 : Chapitre 17

Exercice 381. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Exercice 382. (★)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien de dimension finie.

a) Montrer que $\forall u \in L(E), \exists ! u^* \in L(E), \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$
 u^* est appelé **adjoint** de u .

b) Montrer que $(u^*)^* = u$

c) Si B est une base orthonormée de E , exprimer $M_B(u^*)$ en fonction de $M_B(u)$.

d) Que dire de u^* si u est une isométrie vectorielle ?

e) Que dire de u^* si u est autoadjoint ?

Exercice 383. Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, a un vecteur unitaire de E et α un nombre réel quelconque.

On pose : $\forall x \in E \quad \varphi(x) = x + \alpha \langle x, a \rangle a$

a) Déterminer la dimension de $F = \{a\}^\perp$

b) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

c) Calculer $\varphi(a)$

d) Calculer $\varphi(x)$ pour $x \in F$

e) Montrer que φ est diagonalisable.

f) Déterminer α pour que $\varphi = Id_E$

g) Déterminer α pour que φ soit une symétrie autre que Id .

Caractériser cette symétrie à l'aide de a

h) Déterminer α pour que φ soit une projection autre que Id .

Caractériser cette projection à l'aide de a

Exercice 384. (★)

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $|a_{i,j}| \leq 1$, que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n$, que $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$ et que $n \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$

Exercice 385. Soit a un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad f(x) = a \wedge x + \langle a, x \rangle a$

a) Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3

b) Reconnaître f

Exercice 386. On donne $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ et on pose $A = (a_i a_j) \in M_n(\mathbb{R})$.

Étudier la diagonalisabilité de A , préciser ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Exercice 387. (★)

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. a) Montrer que $S = AA^T$ est une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont positives.

b) Montrer que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2$

c) Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = AA^T$.