Feuille d'exercices n°46 : Chapitre 17

Exercice 373. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $B = (i, j, k)$ la base canonique. Soit r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe orienté par $u = i - j - k$*
Déterminer la matrice de r relativement à B.

Exercice 374. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $B = (i, j, k)$ la base canonique.*
On note . le produit scalaire.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit u un vecteur unitaire de E. Soit r la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}u$ et d'angle θ.
a) Montrer que : $\forall x \in E \quad r(x) = 2sin^2(\frac{\theta}{2})(x.u)u + cos(\theta)x + sin(\theta)u \wedge x$
b) Application : déterminer la matrice, relativement à la base canonique de la rotation d'axe $i+j+k$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Exercice 375. *On considère la matrice suivante $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & a \\ 4 & 8 & b \\ 4 & d & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$*
Déterminer (a, b, c, d) pour que A soit une matrice de rotation et déterminer, alors, les caractéristiques de cette rotation.

Exercice 376. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique B.*
Soit P le plan d'équation $-2x + y + 2z = 0$.
Déterminer la matrice relativement à B de p la projection orthogonale sur P.

Exercice 377. $(\star)$
Montrer la formule du double produit vectoriel : $(a \wedge b) \wedge c = (a.c)b - (b.c)a$

Exercice 378. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique B.*
Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant les matrices suivantes relativement à B :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -8 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & -8 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 379. *Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : MM^T et $M+M^T$ sont diagonalisable.*

Exercice 380. *Soit A une matrice symétrique réelle de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A + 2iI_n$ est inversible.*