Feuille d'exercices n°45 : Chapitre 17

Exercice 365. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.*
Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
Soit f (respectivement g) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant A (respectivement B) comme matrice relativement à la base canonique.
Reconnaître f et g (donner la nature et les éléments caractéristiques)

Exercice 366. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.*
Donner les matrices, relativement à la base canonique, de f la rotation d'angle $-arcsin(\frac{2}{5})$ et de g la réflexion de droite $2x - 3y = 0$

Exercice 367. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.*
Soit D la droite d'équation cartésienne $2x - y = 0$
Déterminer la matrice relativement à la base canonique de f la réflexion de droite D.
Déterminer la nature de $h = f \circ g$ avec g la reflexion d'axe $x = 0$.
Déterminer la nature de $\hat{h} = g \circ f$.

Exercice 368. *Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien $(E, <,>)$.*
Montrer que : $ker(f - Id_E) = (Im(f - Id_E))^\perp$

Exercice 369. $\star$
On considère un espace euclidien $(E, <,>)$.
On dit que $f \in L(E)$ est une similitude vectorielle s'il existe une isométrie vectorielle u et un scalaire $k > 0$ tel que $f = ku$
1°) Montrer que si f est une similitude vectorielle alors elle conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire que : $\forall (x, y) \in E^2 \quad < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$
2°) Montrer que si a et b sont deux vecteurs unitaires orthogonaux : $< a + b, a - b >= 0$
3°) On suppose que f est un endomorphisme non nul conservant l'orthogonalité.
Montrer que f est une similitude.

Exercice 370. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.*
Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ *Soit $P = vect(\vec{u}, \vec{v})$.*
Déterminer la matrice relativement à la base canonique de la réflexion de plan P.

Exercice 371. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $B = (i, j, k)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant* $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *comme matrice relativement à la base canonique B.*
Montrer que f est une rotation, déterminer un vecteur orientant son axe et déterminer son angle.

Exercice 372. $(\star)$
$O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont-ils ouverts ? fermé ? dans $M_n(\mathbb{R})$.