Chapitre 18 : Théorèmes de convergence dominée ; intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, les fonctions sont de la variable réelle et à valeurs dans K avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites et séries de fonctions intégrables

1.1 Théorème de convergence dominée

1.1.1 Théorème

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n : I \to K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I.*

$$\text{Alors : } \begin{cases} i)\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers une fonction notée } f : I \to K \text{ continue par morceaux sur } I \\ ii) \text{ il existe une fonction } \varphi : I \to K \text{ telle que } \varphi \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall t \in I\ ,\ |f_n(t)| \leq \varphi(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{les fonctions } f_n \text{ et la fonction } f \text{ sont intégrables sur } I \\ \int_I f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)dt \end{cases}$$

preuve : HP

Remarques. *Autre écriture :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$

L'hypothèse ii) s'appelle hypothèse de domination

1.1.2 Exemple

1.1.3 Contre-exemple

1.1.4 Autre exemple

1.2 Théorème d'intégration terme à terme

1.2.1 Théorème

Théorème . *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans K.*

$$\text{Si } \begin{cases} i) \text{ les } f_n \text{ sont continues par morceaux et } \textbf{intégrables} \text{ sur } I \\ ii)\ \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une fonction continue par morceaux sur } I \\ iii)\ \sum \int_I |f_n(t)|\, dt \text{ est convergente} \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est } \textbf{intégrable} \text{ sur } I \\ \sum \int_I f_n \text{ est convergente} \\ \int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt \end{cases}$$

preuve : HP

1.2.2 Exemple

1.2.3 Contre-exemple

1.2.4 Utilisation du théorème de convergence dominée pour les sommes partielles

2 Intégrale dépendant d'un paramètre

2.1 Présentation

2.1.1 Blabla

2.1.2 Exemple

2.1.3 Exemples

2.2 Continuité

2.2.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application* $\begin{array}{cccc} f & : & A\times I & \longrightarrow & K \\ & & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

$$\text{Si} \begin{cases} \bullet\ \forall t\in I\ ,\ x\mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } A \\ \bullet\ \forall x\in A\ ,\ t\mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \textbf{ intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t)\in A\times I\ ,\ |f(x,t)|\leq \varphi(t)\ \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$$

alors la fonction $x\mapsto \int\limits_I f(x,t)dt$ *est définie et continue sur A.*

Remarque. *La propriété de continuité étant une propriété locale. On se ramène souvent à des segments de A (voir exemples) puisque si F est continue sur tout segment de A alors F est continue sur A.*

preuve :

2.2.2 Exemple

2.2.3 Contre - exemple

2.3 Théorème de dérivation (Formule de Leibniz)

2.3.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une application* $\begin{array}{cccc} f & : & A\times I & \longrightarrow & K \\ & & (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

$$\text{Si} \begin{cases} \bullet\ \forall t\in I\ ,\ x\mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } A \\ \bullet\ \forall x\in A\ ,\ t\mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux et } \textbf{intégrable} \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall x\in A\ ,\ t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est } \textbf{continue par morceaux} \text{ sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \textbf{ intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t)\in A\times I\ ,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq \varphi(t)\ \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$$

alors

la fonction $g : x\mapsto \int\limits_I f(x,t)dt$ *est de classe C^1 sur A et vérifie* $\forall x\in A\ ,\ g'(x)=\int\limits_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

Remarque. $g'(x)=\frac{d}{dx}(g(x))=\frac{d}{dx}(\int\limits_I f(x,t)dt)=\int\limits_I \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$

On dit que l'on dérive sous le signe somme.

preuve :

2.3.2 Exemple

2.4 Extension du théorème de dérivation

2.4.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit une application* $f \ : \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & K \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

$$\text{Si} \begin{cases} \bullet \ \forall t \in I \ , \ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^k \text{ sur } A \\ \bullet \ \forall x \in A \ \forall i \in [\![0; k-1]\!] \ , \ t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \text{ est continue par morceaux et } \textbf{intégrable} \text{ sur } I \\ \bullet \ \forall x \in A \ , \ t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ est } \textbf{continue par morceaux} \text{ sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \ \textbf{intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in A \times I \ , \ \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq \varphi(t) (\textbf{ Hypothèse de domination}) \end{cases}$$

alors

la fonction $g : x \mapsto \int\limits_I f(x,t)dt$ *est de classe* C^k *sur* A *et vérifie* $\forall x \in A \ \forall i \in [\![1; k]\!] \ , \ g^{(i)}(x) = \int\limits_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$

Remarque. $g^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}(g(x)) = \frac{d^k}{dx^k}(\int\limits_I f(x,t)dt) = \int\limits_I \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)dt$
On dit que l'on dérive sous le signe somme.

preuve :

2.4.2 Exemple

2.5 Théorème de convergence dominée à paramètre continue

2.5.1 Théorème

Théorème . *Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit a une borne de A et soit une application* $f \ : \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & K \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$

$$\text{Si} \begin{cases} \bullet \ \forall t \in I \ , \ f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda(t) \\ \bullet \ \forall x \in A \ , \ t \mapsto f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \ t \mapsto \lambda(t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet \text{ il existe une fonction } \varphi \ \textbf{intégrable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x,t) \in A \times I \ , \ |f(x,t)| \leq \varphi(t) \ \textbf{(Hypothèse de domination)} \end{cases}$$

alors

λ *est intégrable sur* I *et* $\int\limits_I f(x,t)dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int\limits_I \lambda(t)dt$

Remarques. *Autre écriture :* $\lim\limits_{x \to a} \int\limits_I f(x,t)dt = \int\limits_I \lim\limits_{x \to a} f(x,t)dt$
Utile surtout si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, sinon c'est le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, avec éventuellement un prolongement.

preuve :

2.5.2 Exemple