Pour le jeudi 13 février 2025

Devoir à la maison n°11 de Mathématiques

Exercice 1 : e3a 2024 PSI, exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On identifie dans tout l'exercice $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Pour p et q deux entiers naturels non nuls et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note A^T la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, transposée de la matrice A.

On rappelle que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X_1 et X_2 de $\mathbb{R}^n$ est $(X_1|X_2) = X_1^T X_2$, et que $\|X_1\|^2 = X_1^T X_1$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs **linéairement indépendants** de $\mathbb{R}^n$.

On définit la matrice $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $m_{ij} = \delta_{ij} + \alpha x_i x_j + \beta y_i y_j$, où α et β sont deux réels et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

Enfin, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est M.

1. Justifier que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note $U_X = XX^T$.
   (a) Justifier que $U_X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire son terme général. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
   (b) Déterminer le rang de U_X puis une base de son image.
   (c) Prouver que $\ker(U_X)$ et $\mathrm{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.
   (d) Prouver que $\ker(U_X)$ et $\mathrm{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
   (e) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de la matrice U_X.
   (f) On note u_X l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice U_X. Déterminer la matrice de u_X dans une base adaptée à la décomposition de la question 2d.
3. **Dans le cas particulier** où $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, déterminer les valeurs propres de la matrice M. En déduire une matrice diagonale semblable à la matrice M.
4. **On revient au cas général** et on se propose de déterminer les valeurs propres de la matrice $M = I_n + \alpha U_X + \beta U_Y$, quelles que soient les valeurs de α et β.
   (a) On note $F = \mathrm{vect}(X, Y)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.
      i. Déterminer MX.
      ii. En déduire que F est stable par f.
   (b) Justifier que $F^\perp$ est aussi stable par f et déterminer l'endomorphisme induit par f sur $F^\perp$.
   (c) On note $G = \begin{pmatrix} 1+\alpha\|X\|^2 & \alpha(X|Y) \\ \beta(X|Y) & 1+\beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$
      i. Justifier que G est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans la base (X, Y).
      ii. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.
      iii. Justifier, sans calculer ses valeurs propres, que G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont réelles.
      iv. Déterminer les valeurs propres de G.
   (d) Déterminer les valeurs propres de la matrice M.

Exercice 2 : ccINP 2024 PC, exercice 1 : Racine cubique d'une matrice

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.
3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Partie II - Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

5. Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M ?
6. En déduire une racine cubique de la matrice M.
7. Soit $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1 . Montrer que N admet une racine cubique.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A.

III. 1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

9. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

III. 2 - Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right)$$

10. Montrer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont non nuls.
11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho \mathbf{e}^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.
12. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
13. Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Problème : Mines-Ponts 2024 PC : Chaîne de Markov en temps continu.

Dans tout le sujet on fixe un entier naturel $N \geq 2$.

— Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in [\![1; p]\!] \times [\![1; q]\!]$, on note $A[i, j]$ le coefficient à la ligne i et à la colonne j de A. Par abus, si A est une matrice colonne ($q = 1$), on note $A[i]$ pour $A[i, 1]$. De même, si A est une matrice ligne ($p = 1$), on note $A[i]$ pour $A[1, i]$.

— On identifie $\mathbb{R}^N$ avec $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, on note $E_k \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le k^{e} qui vaut 1. On rappelle que $(E_1, \ldots, E_N)$ est une base de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

— On note $U \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc, pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, $U[i] = 1$.

— On appelle *noyau de Markov* une matrice $K \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ telle que
(M_1) $\forall (i, j) \in [\![1; N]\!]^2,\ K[i, j] \geq 0$,
(M_2) $\forall i \in [\![1; N]\!],\ \sum_{j=1}^{N} K[i, j] = 1$.

— On appelle *probabilité* un vecteur ligne $\mu \in \mathscr{M}_{1,N}(\ R)$ tel que
(P_1) $\forall i \in [\![1; N]\!],\ \mu[i] \geq 0,$
(P_2) $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu[j] = 1.$

— On notera I_N la matrice identité de $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$.

Préliminaires

1. Soit $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $AU = U$.

   En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov, alors AB est encore un noyau de Markov.

   On considère un noyau de Markov K.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$. Justifier que la série $\sum \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$ converge.

   On notera H_t la matrice de $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1; N]\!]^2\ ,\ H_t[i, j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n K^n[i, j]}{n!}$$

4. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5. Montrer que pour tout $(t, s) \in {\mathbb{R}_+}^2,\ H_{t+s} = H_t H_s$.

   On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.

Partie 1 — Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N. A l'instant initial, le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.

On suppose que pour tout $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i, il se retrouve dans l'état j avec une probabilité $p_{i,j}$ qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.

Ce système est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $[\![1; N]\!]$ qui correspond à l'état du système après k impulsions. Pour tout $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ et tout entier naturel k tels que $P(Z_k = i) \neq 0$, on a donc $P(Z_{k+1} = j \mid Z_k = i) = p_{i,j}$. En particulier, cette probabilité ne dépend pas de k. De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.

REMARQUE : dans le paragraphe précédent on parle de variable aléatoire. Pour ce problème, on a juste a utilisé le fait que $(Z_k = i)$ désigne l'événement : "le système est dans l'état i après k impulsions"

On considère la matrice K de $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1;N]\!]^2,\ K[i,j] = p_{i,j}.$$

6. Justifier que K est un noyau de Markov.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1;N]\!]$. Montrer que $P(Z_n = j) = K^n[1,j]$.

   On pourra raisonner par récurrence.

8. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t. Pour tout $j \in [\![1;N]\!]$, on note $A_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t ». Justifier que $P(A_{t,j}) = H_t[1,j]$.

REMARQUE : pour les 3/2 , $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(Y_t =) = e^{-t}\frac{t^k}{k!}$ **et** $(Y_t = k)_{k\in\mathbb{N}}$ **est un système complet d'événements.**

Partie 2 — Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension N. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $q_u : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in E,\ q_u(x) = (u(x) \mid x),$$

et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geq 0$.

9. Enoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme u.

   Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de u et on note λ_2 la plus petite valeur propre non nulle de u. On note aussi $p : E \to E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(u)$.

10. Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u(x - p(x)) \geq \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$.

Partie 3 — Convergence de $H_t[i,j]$

On considère un noyau de Markov K. On suppose que 1 est une valeur propre simple de K.

On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ telle que

(a) $\forall j \in [\![1;N]\!]$, $\pi[j] \neq 0$.

(b) $\forall (i,j) \in [\![1;N]\!]^2$, $\pi[i]K[i,j] = K[j,i]\pi[j]$. On dit que K est *π-réversible.*

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel positif t, H_t est aussi un noyau de Markov π-réversible, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1;N]\!]^2, \quad \pi[i]H_t[i,j] = H_t[j,i]\pi[j].$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, si X et Y sont dans $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i].$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer, si $(i,j) \in [\![1;N]\!]^2$, la limite de $H_t[i,j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

11. Montrer que $\pi K = \pi$.

12. Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite on note E l'espace euclidien $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

13. On considère l'endomorphisme u de E défini par $u(X) = (I_N - K)X$. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E et que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(U)$.

14. Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (X[i] - X[j])^2 K[i, j] \pi[i].$$

Que dire des valeurs propres de u ?

Soit $X \in E$. On note ψ_X la fonction définie sur E à valeurs dans E par $\psi_X(t) = H_t X$. On note aussi φ_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_X(t) = \|H_t X\|^2$.

15. Justifier que ψ_X est dérivable et que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\psi_X'(t) = -(I_N - K) H_t X.$$

16. En déduire que φ_X est dérivable et exprimer φ_X' à l'aide de q_u.

On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u)$.

17. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

18. On pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u.
— Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_Y'(t) \leq -2\lambda \varphi_Y(t)$.
— En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\|H_t X - p(X)\|^2 \leq e^{-2\lambda t} \|X - p(X)\|^2$.

19. Soit $i \in [\![1; N]\!]$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i] U\| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\pi[i]}$.

20. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^{N} \Big(H_{\frac{t}{2}}[i, k] - \pi[k] \Big) \Big(H_{\frac{t}{2}}[k, j] - \pi[j] \Big).$$

On pourra utiliser la question 5.

21. En déduire que pour tout $(i, j) \in [\![1; N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$[|H_t[i, j] - \pi[j]| \leq e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} H_t[i, j]$.

Fin du problème