Lundi 27 janvier 2025

PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°5

SUJET format 1 : ccINP

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Questions de cours

Q1) Donner la définition d'un ensemble dénombrable.

Q2) Enoncer, avec précision, le théorème sur la formule des probabilités composées avec n événements.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note χ_A son polynôme caractéristique.

Q3) Donner la définition de χ_A.

Q4) Que dire de $\chi_A(A)$?

Exercice n°1

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des frênes, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des frênes, et 25% des hêtres. On pourra noter M l'événement "l'arbre est malade", C l'événement "l'arbre est un chêne", F l'événement "l'arbre est un frêne" et H l'événement "l'arbre est un hêtre".

Q5) Quelle est la probabilité qu'un arbre soit malade ?

Q6) Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un frêne ? un hêtre ?

Q7) Les événements M et C sont-ils indépendants ?

Exercice n°2

On considère l'équation différentielle $(E) \Leftrightarrow xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + 2(x+1)y(x) = 0$

On chercher à déterminer S, l'ensemble des solutions de (E) sur $I =]0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Q8) Expliquer pourquoi, en citant avec précision le théorème utilisé, S est un espace vectoriel de dimension 2.

On considère y une fonction dérivable de I dans R et on pose $\begin{array}{rccl} Y & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & xy(x) \end{array}$

Q9) Montrer que : $y \in S \Leftrightarrow Y$ est solution sur I de (F)

Avec $(F) \Leftrightarrow Y'' + 2Y' + 2Y = 0$

Q10) Résoudre (F)

Q11) Déterminer S.

Q12) Montrer qu'il existe une unique fonction y_1 dans S telle que $\lim\limits_{x \to 0} y_1(x) = 1$

On note Y_1 la fonction définie sur $J = [0, +\infty[$ par $Y_1(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Q13) Montrer que Y_1 est de classe C^∞ sur J.

Exercice n°3 : exercice préliminaire au problème - mais les 2 sont indépendants ...

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Q14) Calculer, sous forme factorisée, χ_A le polynôme caractéristique de A.
Peut-on en déduire que A est diagonalisable ?

Q15) Déterminer les sous-espaces propre de A sous forme de vect.

Q16) Déterminer D et P dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
On classera les éléments de la diagonale de D dans l'ordre croissant et on construira P de telle sorte que la première ligne soit constituée de 1.

Q17) Résoudre le système différentiel $(S') \Leftrightarrow Y' = DY$ avec $Y : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$
On cherche les solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$.

Q18) Résoudre le système différentiel $(S) \Leftrightarrow X' = AX$ avec $X : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$
On cherche les solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$.

Q19) Trouver une solution de (S) qui ne soit pas bornée sur $[0, +\infty[$ et trouver une solution de (S) qui soit bornée sur $[0, +\infty[$

Problème

Notations et définitions

- soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$;
- $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$; si $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée ;
- $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, et $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$;
- on note I_p la matrice identité de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ et 0_p la matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ ne comportant que des 0 ;
- on note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$;
- étant donnée une matrice $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres.

On considère une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

Q20) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$.

Q21) Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \displaystyle\max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q22) Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

Q23) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$.

Q24) En utilisant la question Q23), montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q25) Établir, pour $n \geqslant 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
En déduire, pour $n \geqslant 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

Q26) Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$: $U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$

Q27) Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1,n]\!]\right\}$.
Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1, n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

Q28) Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0, \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0. \end{array} \right.$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q29) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la dimension.

Q30) Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q31) En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

Q32) En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II – Système différentiel

II.1 – Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

Q33) Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

Q34) Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q35) On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ soit inversible.

Q36) En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice : $N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}$

Q37) Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C} ; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

Q38) Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q39) Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 – Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1'' & = & -2x_1 + x_2, \\ x_2'' & = & x_1 - 2x_2. \end{array} \right. \tag{2}$$

Q40) Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

Q41) En utilisant la question Q37), déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Q42) En utilisant la question Q38), déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

Q43) Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

Q44) Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$.

FIN