PSI* 2024-2025, Mathématiques DS n°5 : Correction

Question de cours

Voir cours

Exercice n°1

Q5) Une lecture directe de l'énoncé donne : $P(C) = \frac{3}{10}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ et $P(H) = \frac{1}{5}$
On a aussi les probabilités conditionnelles : $P(M|C) = \frac{1}{10}$, $P(M|F) = \frac{1}{25}$ et $P(M|H) = \frac{1}{4}$

Calculons la probabilité qu'un arbre soit malade.
Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (C, F, H) on a :
$P(M) = P(M|C)P(C) + P(M|F)P(F) + P(M|H)P(H)$

Application numérique : $P(M) = \frac{1}{10}\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\frac{1}{25} + \frac{1}{5}\frac{1}{4} = \frac{3}{100} + \frac{1}{50} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un arbre soit malade est donc de } \frac{1}{10}}$

Q6) Par la formule de Bayes on a :
$P(C|M) = \frac{P(M|C)P(C)}{P(M)}$, $P(F|M) = \frac{P(M|F)P(F)}{P(M)}$ et $P(H|M) = \frac{P(M|H)P(H)}{P(M)}$

Application numérique : $\begin{cases} P(C|M) = \frac{\frac{1}{10}\frac{3}{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \\ P(F|M) = \frac{\frac{1}{25}\frac{1}{2}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{5} \\ P(H|M) = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{\text{Sachant qu'un arbre est malade, la probabilité que ce soit un chêne est de } \frac{3}{10} = 30\%}$

$\boxed{\text{Sachant qu'un arbre est malade, la probabilité que ce soit un frêne est de } \frac{1}{5} = 20\%}$

$\boxed{\text{Sachant qu'un arbre est malade, la probabilité que ce soit un hêtre est de } \frac{1}{2} = 50\%}$

Q7) On remarque que $P(M|C) = \frac{1}{10} = P(M)$.
Alors $P(M|C) = P(M) \Rightarrow \frac{P(M \cap C}{P(C)} = P(M) \Rightarrow P(M \cap C) = P(M)P(C)$

$\boxed{\text{Par définition, les événements } M \text{ et } C \text{ sont indépendants.}}$

Exercice n°2

Q8) Sur I on a $x \neq 0$ et donc $(E) \Leftrightarrow y''(x) + \frac{2(x+1)}{x} y'(x) + \frac{2(x+1)}{x} y(x) = 0$
(E) alors une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients continues sur I.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz du cours, on a alors : $\boxed{S \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$

Q9) On effectue un changement de fonction inconnue licite car $x \neq 0$ sur I.
Comme y est deux fois dérivable (car solution de (E)) alors Y est deux fois dérivables et on a :
$y(x) = \frac{Y(x)}{x}$ et l'on notera $y = \frac{Y}{x}$ (abus de notation classique)
$y' = -\frac{Y}{x^2} + \frac{Y'}{x}$ et $y'' = \frac{2Y}{x^3} - 2\frac{Y'}{x^2} + \frac{Y''}{x}$

Alors : $y \in S$
$\Leftrightarrow y$ solution de (E) sur I
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + 2(x+1)y(x) = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x(\frac{2Y}{x^3} - 2\frac{Y'}{x^2} + \frac{Y''}{x}) + 2(x+1)(-\frac{Y}{x^2} + \frac{Y'}{x}) + 2(x+1)\frac{Y}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ \frac{2Y}{x^2} - 2\frac{Y'}{x} + Y'' + 2(x+1)(-\frac{Y}{x^2} + \frac{Y'}{x}) + 2(x+1)\frac{Y}{x} = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ 2Y - 2xY' + x^2Y'' + 2(x+1)(-Y + xY') + 2(x+1)xY = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x^2Y'' + (-2xY' + 2(x+1)x)Y' + (2 - 2(x+1) + x2(x+1))Y = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ x^2Y'' + 2x^2Y' + 2x^2Y = 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in I \ , \ Y'' + 2Y' + 2Y = 0$
$\Leftrightarrow Y$ est solution de (F) sur I

On a bien $\boxed{Y \text{ solution de } (F) \text{ sur } I}$

Q10) (F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants, d'équation caractéristique :
$r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = i^2 \Leftrightarrow r = -1 + i$ ou $r = -1 - i$

On sait alors d'après le cours que : $\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall x \in I \ , \ Y(x) = e^{-x}(Acos(x) + Bsin(x))}$

Q11) Comme dans Q9) on a raisonné par équivalence on a, en utilisant Q10) et la relation liant y et Y : y solution de (E) sur I
$\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall x \in I \ , \ Y(x) = e^{-x}(Acos(x) + Bsin(x))$
$\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall x \in I \ , \ y(x) = \frac{e^{-x}(Acos(x)+Bsin(x))}{x}$

On a donc : $\boxed{S = \left\{ \begin{array}{cccc} y & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{e^{-x}(Acos(x)+Bsin(x))}{x} \end{array} \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$

Q12) Soit y une solution de (E) sur I, alors, on sait que :
$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \forall x > 0 \ , \ y(x) = \frac{e^{-x}(Acos(x)+Bsin(x))}{x}$
Alors, au voisinage de 0 : $y(x) = \frac{(1-x+o(x))(A+o(x)+Bx+o(x))}{x} = \frac{(A+Bx-Ax+o(x))}{x} = \frac{A}{x} + (B-A) + o(1)$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B - A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{Il existe, donc une unique fonction } y_1 \text{ dans } S \text{ telle que } \lim\limits_{x \to 0^+} y_1(x) = 10}$

$\boxed{\text{C'est la fonction } \begin{array}{cccc} y_1 & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{e^{-x}sin(x)}{x} \end{array}}$

Q13) On remarque que Y_1 vérifie $Y_1 = FG$ sur J avec

$$F : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array} \quad \text{et} \quad G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Comme F est C^∞ sur J, il reste à montrer que G est C^∞ sur J.
Pour cela on va montrer que G est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Mais, d'après le cours : $\forall x \in \mathbb{R}$, $sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $G(x) = \frac{sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$
Comme la relation est aussi valable en 0, on en déduit, puisque une série entière est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, que G est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Avec, ce qui a été vue précédemment on a bien : $\boxed{Y_1 \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } J}$

Exercice n°3

Q14) Par définition :$\chi_A(X) = det(XI_3 - A)$, donc
$\chi_A(X)$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \; C_1 \longleftarrow C_1 - 2C_3$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -2(X-1) & -2 & X-1 \end{vmatrix} \; L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & -4 & X-1 \end{vmatrix} \; \text{par blocs}$$

$= (X-1)(X^2 - 2X - 3)$
$= (X-1)(X+1)(X-3)$

On a donc : $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X+1)(X-3)}$

Comme χ_A est scindé simple, on sait d'après le cours que : $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

Q15) De Q14) on déduit : $Sp(A) = \{-1, 1, 3\}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A + I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -y = 2x \end{cases}$

On a donc $ker(A + I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \end{cases}$

On a donc $ker(A - I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in ker(A - 3I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = y = 2x \end{cases}$

On a donc $ker(A - I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } A \text{ sont } \begin{cases} ker(A + I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ ker(A - I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ ker(A - 3I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}}$$

Q16) On sait déjà, par Q14) que A est diagonalisable
On obtient une base diagonalisant A par réunion des bases des sous-espaces propres.

Par la formule de changement de bases on a : $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$

Q17) (S')

$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = -u \\ v' = v \\ w' = 3w \end{cases}$ on a des EDL_1 homogène à coefficients constants

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u(t) = ae^{-t} \\ v(t) = be^{t} \\ w(t) = ce^{3t} \end{cases} \text{avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3}$

On a bien résolu (S')

Q18) Si on pose $Y = P^{-1}X$ alors :

$X' = AX$

$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$ on multiplie à gauche par P^{-1}

$\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$ on $Y' = P^{-1}X$

$\Leftrightarrow Y' = DY$ on utilise Q17)

$\Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = ae^{-t} \\ v(t) = be^{t} \\ w(t) = ce^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on utilise $X = PY$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = ae^{-t} + be^{t} + ce^{3t} \\ y(t) = -2ae^{-t} + 2ce^{3t} \\ z(t) = 2ae^{-t} - 2be^{t} + 2ce^{3t} \end{cases}}$

Q19) • Si on prend $a = b = 0$ et $c = 1$ alors $\begin{cases} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = 2e^{3t} \\ z(t) = 2e^{3t} \end{cases}$ et X n'est pas bornée.

• Si on prend $a = 1$ et $b = c = 0$ alors $\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = -2e^{-t} \\ z(t) = 2e^{-t} \end{cases}$ et X est bornée.

Problème : Problème 2 deCCinp : PSI 2019

Problème 1

Q20) On a la i-ème coordonnée de Ax qui vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, la i-ème coordonnée de λx valant λx_i on a donc : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j}$

Q21) En appliquant Q20) en $i = i_0$ on obtient : $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j$

Par l'inégalité triangulaire, comme $|x_j| \leq |x_{i_0}|$ on a : $|\lambda x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\,|x_{i_0}|$

Comme $x \neq 0$ alors $|x_{i_0}| \neq 0$, donc on peut simplifier ci-dessus et obtenir : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ est évident et donc : $\boxed{|\lambda| \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\}}$

Q22) $A_n(\alpha,\beta)$ est une matrice symétrique réelle, on sait donc d'après le cours et le théorème spectral, qu'elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont donc réelles.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_n(\alpha,\beta) \text{ sont réels.}}$

Q23) La somme des valeurs absolues de tout les termes d'une ligne de $A_n(\alpha,\beta)$ donne $|\alpha| + |\beta|$ ou $|\alpha| + 2\,|\beta|$
L'application directe de Q21) donne que : $\boxed{\lambda \in Sp(A_n(\alpha,\beta)) \Rightarrow |\lambda| \leq |\alpha| + 2\,|\beta|}$

Q24) On applique Q23) avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on a donc $|\lambda| \leq 2$. On peut donc pose $\theta = Arccos(\frac{\lambda}{2})$ puisque $\frac{\lambda}{2} \in [-1,1]$ et on a alors $cos(\theta) = \frac{\lambda}{2}$ et $\theta \in [0,\pi]$ par définition de $Arccos$.

On a donc $\boxed{\exists \theta \in [0;\pi]\quad,\quad \lambda = 2cos(\theta)}$

Q25) $\chi_{A_n(0,1)}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$

En développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_{A_n(0,1)}(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne dans le deuxième déterminant :
$\chi_{A_n(0,1)}(X) = X\chi_{A_{n-1}(0,1)}(X) - \chi_{A_{n-2}(0,1)}(X)$

Donc $\chi_{A_n(0,1)}(2X) = (2X)\chi_{A_{n-1}(0,1)}(2X) - \chi_{A_{n-2}(0,1)}(2X)$

On a alors : $\boxed{U_n(X) = 2XU_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)}$

Q26) On fixe $\theta \in]0, \pi[$, donc $sin(\theta) \neq 0$
Montrons par une récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(cos(\theta)) = \frac{sin((n+1)\theta)}{sin(\theta)}$

Initialisation au rang $n = 1$ et au rang $n = 2$:

On calcule : $U_1(X) = 2X$ et $U_2(X) = \begin{vmatrix} 2X & -1 \\ -1 & 2X \end{vmatrix} = 4X^2 - 1$

Pour $n = 1$: $U_1(\cos(\theta)) = 2cos(\theta)$ et $\frac{sin((1+1)\theta)}{sin(\theta)} = \frac{sin(2\theta)}{sin(\theta)} = \frac{2sin(\theta)cos(\theta)}{sin(\theta)} = 2cos(\theta)$

Pour $n = 2$: $U_2(cos(\theta)) = 4cos^2(\theta) - 1$ et
$\frac{sin((2+1)\theta)}{sin(\theta)}$
$= \frac{sin(2\theta)cos(\theta)+sin(\theta)cos(2\theta)}{sin(\theta)}$
$= \frac{2sin(\theta)cos(\theta)cos(\theta)+sin(\theta)cos(2\theta)}{sin(\theta)} = 2cos^2(\theta) + cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) + 2cos^2(\theta) - 1 = 4cos^2(\theta) - 1$

La propriété voulue est bien vraie au rang $n = 1$ et rang $n = 2$

Hérédité : Soit $n \geq 3$. On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ et au rang $n - 2$.

On a : $U_n(cos(\theta))$
$= 2cos(\theta)U_{n-1}(cos(\theta)) - U_{n-2}(cos(\theta))$ on utilise les hypothèses de récurrence
$= 2cos(\theta)\frac{sin(n\theta)}{sin(\theta)} - \frac{sin((n-1)\theta)}{sin(\theta)}$ on sait que $2cos(b)sin(a) = sin(a + b) + sin(a - b)$
$= \frac{sin((n+1)\theta)+sin((n-1)\theta)}{sin(\theta)} - \frac{sin((n-1)\theta)}{sin(\theta)} = \frac{sin((n+1)\theta)}{sin(\theta)}$
On a le résultat au rang $n + 1$

On a montrer par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n(cos(\theta)) = \frac{sin((n+1)\theta)}{sin(\theta)}}$

Q27) On sait que les valeurs propres de $A_n(0, 1)$ s'écrivent $\lambda = 2cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$.
On a aussi $\lambda \in sp(A_n(0, 1)) \Leftrightarrow \chi_{A_n(0,1)}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{A_n(0,1)}(2cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow U_n(cos(\theta)) = 0$

Mais $U_n(cos(\theta)) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{sin((n+1)\theta)}{sin(\theta)} = 0 \Leftrightarrow sin((n + 1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}$, $(n + 1)\theta = j\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}$, $\theta = \frac{j\pi}{n+1}$

On veut $\theta \in]0, \pi[$, on obtient alors n valeurs propres distinctes pour $A_n(0, 1)$ données par $2cos(\frac{j\pi}{n+1})$ pour $j \in [\![1, n]\!]$, distinctes car cos est injective sur $[0, \pi]$

Comme $A_n(0, 1) \in M_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres alors, au bilan :

$\boxed{A_n(0,1) \text{ admet } n \text{ valeurs propres } \textbf{simples} \text{ et son spectre vaut : } Sp(A_n(0,1)) = \{2cos(\frac{j\pi}{n+1}) \ ; \ j \in [\![1,n]\!]\}}$

Q28) Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2cos(\theta_j)$ alors $Ax = cos(\theta_j)x$, ce qui donne, en isolant le calcul sur la première ligne et sur la dernière :

$$\boxed{\begin{cases} -2cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = 0 \\ x_{k-1} - 2cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = 0 \ , \ \forall k \in [\![2, n-1]\!] \\ x_{n-1} - 2cos(\theta_j)x_n & = 0 \end{cases}}$$

Q29) E est l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constans, donc d'après le cours : $\boxed{E \text{ espace vectoriel de dimension 2.}}$

Q30) L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 est :
$R^2 - 2cos(\theta_j)R + 1 = 0$ avec $\Delta = 4cos^2(\theta_j) - 4 = -4sin^2(\theta_j) < 0$ car $\theta_j \in]0, \pi[$
Les solutions sont donc $R = cos(\theta_j) + isin((\theta_j) = exp(i\theta_j)$ et $R = cos(\theta_j) - isin((\theta_j) = exp(-i\theta_j)$
D'après le cours, on sait qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ u_k = Acos(k\theta_j) + Bsin(k\theta_j)$

Alors : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ Acos((n+1)\theta_j) + Bsin((n+1)\theta_j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = 0$ puisque $\begin{cases} sin((n+1)\theta_j) = 0 \\ cos((n+1)\theta_j) = 1 \end{cases}$

L'ensemble des suites de E vérifiant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$ est donc :

$\boxed{\text{l'ensemble des suites de la forme } \{B(sin(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}} \ , \ B \in \mathbb{R}\}}$

Q31) On sait, d'après Q27), que les valeurs propres sont simples et donc que les sous espaces propres associés sont de dimension 1.
En utilisant Q30) et Q28), on obtient que l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2cos(\theta_j)$ est : $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} sin(\theta_j) \\ sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ sin(n\theta_j) \end{pmatrix})}$

Q32) Si $\beta = 0$ alors $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n$, alors $A_n(\alpha, 0)$ admet une seule valeur propre α et le sous espace prop associé est l'espace total.

Si $\beta \neq 0$ alors $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1)$

On sait que $A_n(0,1)$ est diagonalisable (par Q22)), on connaît les valeurs propres (qui sont simples), par Q27) et une base de vecteurs propres par Q31).
On a donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \ , \ A_n(0,1) = PDP^{-1}$ avec $D = diag\big(2cos(\frac{j\pi}{n+1}) \ , \ j \in [\![1, n]\!]\big)$

Alors : $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1) = \alpha P I_n P^{-1} + \beta PDP^{-1} = P(\alpha I_n + \beta D)P^{-1} = P\hat{D}P^{-1}$
avec $\hat{D} = diag\big(\alpha + 2cos(\frac{j\pi}{n+1}) \ , \ j \in [\![1, n]\!]\big)$

$\boxed{A_n(\alpha,\beta) \text{ admet } n \text{ valeur propres simples distinctes les } \alpha+2\beta cos(\theta_j) \text{ avec } j\in [\![1,n]\!]}$

$$\boxed{\text{pour lesquelles les sous espaces propres sont } Vect(\begin{pmatrix} sin(\theta_j) \\ sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ sin(n\theta_j) \end{pmatrix})}$$

Q33) Directement, puisque $CD-DC=0_n$ car C et D commutent : $\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}}$

Q34) En effectuant un déterminant par blocs dans la relation de Q33) :
$det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix})det(D) = det(AD-BC)det(D)$
Mais, si D est inversible, alors $det(D)\neq 0$ et on peut simplifier la relation ci-dessus et on a :
$det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = det(AD-BC)$

$\boxed{\text{L'égalité (1) est vraie si } D \text{ est inversible.}}$

Q35) Si $sp(D)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ on peut poser $\rho = inf\{|\lambda| \ , \ \lambda\in sp(D) \text{ et } \lambda\neq 0\}$.
Si $sp(D)=\{0\}$ on pose arbitrairement $\rho=1$.
Dans les deux cas on a $\rho>0$ et $]-\rho,0[\cap sp(D)=\emptyset$

Alors, comme $\frac{1}{p}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il existe $p_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall p\geq p_0 \ \ -\rho<\frac{-1}{p}<0$ et on a alors $D+\frac{1}{p}I_n$ est inversible car $\frac{-1}{p}\notin sp(D)$

Donc : $\boxed{\exists p_0\in\mathbb{N}^* \ , \ \forall p\in\in\mathbb{N}^* \ , \ n\geq n_0 \Rightarrow D+\frac{1}{p}I_n \text{ est inversible.}}$

Q36) Par Q34) et Q35) on a : $\forall p\geq p_0 \ , \ det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+\frac{1}{p}I_n \end{pmatrix}) = det(A(D+\frac{1}{p}I_n)-BC)$, mais on sait que det est continue donc, en faisant tendre p vers $+\infty$, on a par continuité :

$$\boxed{det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = det(AD-BC)}$$

Q37) Soit χ_N le polynôme caractéristique de N alors :
$\chi_N(X) = det(XI_{2n}-N) = \begin{vmatrix} XI_n & -I_n \\ -M & XI_n \end{vmatrix}$
Comme M et $-XI_n$ commutent on peut utiliser la relation (1) et on en déduit :
$\chi_N(X) = det((XI_n)(XI_n)-(-M)(-I_n)) = det(X^2I_n-M) = \chi_M(X^2)$

On a donc $\chi_N(\mu)=0 \Leftrightarrow \chi_M(\mu^2)=0$

On en déduit : $\boxed{Sp(N) = \{\mu\in\mathbb{C} \ , \ \mu^2\in Sp(M)\}}$

Q38) Soit $\mu \in sp(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

Alors $Mx = \mu x$

Alors $N \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Comme } \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \text{ est non nul, c'est bien un vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \mu.}$

Q39) Pour commencer si M est inversible alors $0 \notin sp(N)$ et donc N inversible.

Comme M est diagonalisable alors $\exists B_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ une base de vecteurs propres de M avec x_i associé à la valeur propre λ_i

Comme $\lambda_i \neq 0$ (M inversible) il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$, $\mu_i^2 = \lambda_i$ et $\mu_i \neq 0$

On pose alors $B = ((\begin{pmatrix} x_1 \\ \mu_1 x_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ \mu_n x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ -\mu_1 x_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ -\mu_n x_n \end{pmatrix})$

Montrons que B est une base.

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \begin{pmatrix} x_i \\ \mu_i x_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \begin{pmatrix} x_i \\ -\mu_i x_i \end{pmatrix} = 0_{2n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) x_i = 0_n$ et $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i \alpha_i - \mu_i \beta_i) x_i = 0_n$

Comme B_1 est un base on a alors $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\begin{cases} \alpha_i + \beta_i = 0 \\ \mu_i \alpha_i - \mu_i \beta_i = 0 \end{cases}$

Mais $\mu_i \neq 0$ donc $\forall i \in [\![1;]\!]$, $\begin{cases} \alpha_i + \beta_i = 0 \\ \alpha_i - \beta_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = 0 \end{cases}$

On en déduit donc que B est un base. Comme c'est une base de vecteurs propres de N alors N est diagonalisable.

On a donc : $\boxed{\text{Si } M \text{ est diagonalisable et inversible alors } N \text{ est diagonalisable et inversible.}}$

Q40) $\begin{cases} x_1'' = -2x_1 + x_2 \\ x_2'' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1)' = x_1' \\ (x_2)' = x_2' \\ (x_1')' = -2x_1 + x_2 \\ (x_2')' = x_1' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow X' = BX$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(-2,1) & 0_2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

On a donc : $\boxed{\alpha = -2 \text{ et } \beta = 1}$

Le théorème de Cauchy linéaire permet d'affirmer que :

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension 4.}}$

Q41) On pose $C = A_2(-2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ qui se diagonalise de la manière suivante :

$C = Q\Delta Q^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

De plus $-1 = i^2$ et $-3 = (\sqrt{3}i)^2$

On en déduit, à l'aide de Q38, que $B = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

On a donc $\boxed{B \text{ diagonalisable et } Sp(B) = \{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i, i\}}$

Q42) On a vu en Q41) que : $\boxed{B = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{3} & i\sqrt{3} & -i & i \\ i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} & -i & i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}}$

Q43) On sait résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre 1 homogène à coefficients constants.

Or : $Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = -i\sqrt{3}y_1(t) \\ y_2'(t) = i\sqrt{3}y_2(t) \\ y_3'(t) = -iy_3(t) \\ y_4'(t) = iy_4(t) \end{cases}$

Donc $\boxed{\text{les solutions de } Y' = DY \text{ s'écrivent } \begin{cases} y_1(t) = aexp(-i\sqrt{3}t) \\ y_2(t) = bexp(i\sqrt{3}t) \\ y_3(t) = cexp(-it) \\ y_4(t) = dexp(it) \end{cases} \text{ avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4}$

Q44) $X' = BX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X \Leftrightarrow Y' = DY$ avec $Y = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PY$

Donc $X = PY \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = ae^{-i\sqrt{3}t} + be^{i\sqrt{3}t} + ce^{-it} + de^{it} \\ x_2(t) = -ae^{-i\sqrt{3}t} - be^{i\sqrt{3}t} + ce^{-it} + de^{it} \\ x_1'(t) = -i\sqrt{3}ae^{-i\sqrt{3}t} + i\sqrt{3}be^{i\sqrt{3}t} - ice^{-it} + die^{it} \\ x_2'(t) = i\sqrt{3}ae^{-i\sqrt{3}t} - i\sqrt{3}be^{i\sqrt{3}t} - ice^{-it} + die^{it} \end{cases}$

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ -a-b+c+d=0 \\ -\sqrt{3}a+\sqrt{3}b-c+d=0 \\ \sqrt{3}a-\sqrt{3}b-c+d=0 \end{cases}$

On fait L_3+L_4, on obtient $c=d$ donc on a : $\begin{cases} a+b+2c=1 \\ -a-b+2c=0 \\ -\sqrt{3}a+\sqrt{3}b=0 \\ c=d \end{cases}$

On fait L_1+L_2, on obtient $c=\frac{1}{4}$ donc on a : $\begin{cases} c=\frac{1}{4} \\ -a-b=-\frac{1}{2} \\ -a+b=0 \\ d=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$

La solution de (2) avec la condition initiale $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1,0,0,0)$ est donc

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4}[e^{-i\sqrt{3}t} + e^{i\sqrt{3}t} + e^{-it} + e^{it}] \\ x_2(t) = \frac{1}{4}[-e^{-i\sqrt{3}t} - e^{i\sqrt{3}t} + e^{-it} + e^{it}] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}[cos(\sqrt{3}t) + cos(t)] \\ x_2(t) = \frac{1}{4}[-cos(\sqrt{3}t) + cos(t)] \end{cases}}$$