Centrale 2018 PSI Mathématiques 1

Q1) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $A_k = A^k$ et $A_{-k} = (A^T)^k$

On a alors : $T(t_{-n+1}, ..., t_0, t_1, t_{n-1}) = \sum\limits_{k=-n+1}^{n-1} t_k A_k$

Alors $Toep_n = Vect((A_k)_{k \in [\![-n+1,n-1]\!]})$ et comme la famille $(A_k)_{k \in [\![-n+1,n-1]\!]}$ est libre, c'est une base de $Toep_n$ qui est alors de dimension $2n-1$.

$\boxed{Toep_n \text{ est un sous espace vectoriel de } M_n(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 2n-1 \text{ dont une base est } (A_k)_{k \in [\![-n+1,n-1]\!]}.}$

Q2) Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ que l'on écrit $P = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q = \sum\limits_{j=0}^{q} b_j X^j$

Alors $P(A)Q(B) = (\sum\limits_{i=0}^{p} a_i A^i)(\sum\limits_{j=0}^{q} b_j B^j) = \sum\limits_{i=0}^{p} \sum\limits_{j=0}^{q} a_i b_j A^i B^j$

Mais A et B commutent donc $A^i B^j = B^j A^i$ et donc
$P(A)Q(B) = \sum\limits_{j=0}^{q} \sum\limits_{i=0}^{p} a_i b_j B^j A^i = (\sum\limits_{j=0}^{q} b_j B^j)(\sum\limits_{i=0}^{p} a_i A^i) = Q(B)P(A)$

$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent et si } P, Q \in \mathbb{C}[X] \text{ alors } P(A)Q(B) = Q(B)P(A)}$

Q3) $\chi_A(X) = det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-a \end{vmatrix}$ et donc $\boxed{\chi_A(X) = X^2 - 2aX + (a^2 - bc)}$

Q4) Calculons le discriminant de $\chi_A(X)$: $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 - bc) = 4bc$
On distingue alors trois cas :
cas 1 : $bc \neq 0$
Alors $\delta \neq 0$ et A admet deux valeurs propres distinctes et donc A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$
cas 2 : $b = c = 0$
Alors $A = aI_2$ et A est diagonalisable car diagonale.
cas 3 : $bc = 0$ et $(b, c) \neq (0, 0)$
$bc = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $c = 0$ et on a alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$

Comme A admet un valeur propre double a et que A ne vaut pas I_2 (b ou c non nul), A n'est pas diagonalisable.

Bilan : $\boxed{A \text{ diagonalisable si et seulement si } [bc \neq 0] \text{ ou } [bc = 0 \text{ et } b \neq 0] \text{ ou } [bc = 0 \text{ et } c \neq 0]}$

Q5) Le polynôme caractéristique de M est de degré deux et admet donc deux racines (éventuellement confondues).
M admet donc deux valeurs propres α et β

cas 1 : $\alpha \neq \beta$
Alors M admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$

cas 2 $\alpha = \beta$

M est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé et donc M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

On a donc bien que $\boxed{M \text{ est semblable à une des deux matrices proposées.}}$

Q6) $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est une matrice de Toepliz

Si $\alpha \neq \beta$ alors $M = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique
$X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = (X-\alpha)(X-\beta)$ et donc M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$
et donc $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de Toepliz

D'après Q5) et ce qui précède dans ce Q6) :
$\boxed{\text{toute matrice de } M_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de Toepliz.}}$

Q7) Si on écrit $A_n(a,b,c)X = \lambda X$ alors :
à la ligne 1 on a : $ax_1 + bx_2 = \lambda x_1 \Leftrightarrow bx_2 + (a-\lambda)x_1 + cx_0 = 0$ puisque $x_0 = 0$
à la ligne k avec $1 < k < n$: $cx_{k-1} + ax_k + bx_{k+1} = \lambda x_k \Leftrightarrow bx_{k+1} + (a-\lambda)x_k + cx_{k-1} = 0$
à la ligne n on a : $cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n \Leftrightarrow bx_{n+1} + (a-\lambda)x_n + cx_{n-1} = 0$ puisque $x_{n+1} = 0$

On a donc :
$\boxed{(x_1, \ldots, x_n) \text{ qui sont les termes d'une suite vérifiant } \forall k \in \mathbb{N} \ , \ bx_{k+1} + (a-\lambda)x_k + cx_{k-1} = 0}$

Remarque : on ne sait pas trop (en tout cas pour le moment), ce que valent les termes x_k pour $k \geq n+2$, mais la relation de récurrence permet de les définir.

Q8) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants, d'équation caractéristique $(I.1)$

Cas 1 :
Si $I.1)$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 alors : $\exists (A,B)\in\mathbb{C}^2 \quad x_k = Ar_1^k + Br_2^k$

Cas 2 :
Si $I.1)$ admet une racine double r alors : $\exists (A,B)\in\mathbb{C}^2 \quad x_k = (A+Bk)r^k$

Q9) Raisonnons par l'absurde.
Si $I.1)$ admet une racine double alors la relation trouvée au Q8) permet d'obtenir :
$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ (A+B(n+1))r^{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ A = B = 0 \right.$ car 0 n'est pas solutions de $I.1)$ (sinon $c=0$ et on a $bc\neq 0$)
et donc tout les x_k sont nuls et alors $X=0$ et donc n'est pas un vecteur propre ce qui est absurde.

On a donc $\boxed{(I.1) \text{ qui admet deux racines distinctes } r_1 \text{ et } r_2}$

Q10) r_1 et r_2 racines de $(I.1)$ donne par les relations coefficients racines : $r_1r_2 = \frac{c}{b}$ et $r_1+r_2 = \frac{\lambda-a}{b}$

Comme $bc\neq 0$ alors $r_1r_2 = \frac{c}{b}\neq 0$ et donc r_1 et r_2 sont non nuls.

Avec les notations ci-dessus : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ar_1^0 + Br_2^0 = 0 \\ Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ A(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0 \end{cases}$

Mais $A\neq 0$ car sinon $X=0$ donc $r_1^{n+1} - r_2^{n+1} = 0$ et donc $(\frac{r_1}{r_2})^{n+1} = 1$ $(r_2\neq 0)$
Et donc $\frac{r_1}{r_2}\in\mathbb{U}_{n+1}$

On a bien : $\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ non nuls et } \frac{r_1}{r_2}\in\mathbb{U}_{n+1}}$

Q11) D'après Q10) et $\frac{r_1}{r_2}\in\mathbb{U}_{n+1}$ il existe $\ell\in[\![1;n]\!]$ tel que : $\frac{r_1}{r_2} = exp(2i\frac{\ell\pi}{n+1})$
(On a $\ell\neq 0$ car $r_1\neq r_2$)

Donc $r_1 = r_2 exp(2i\theta)$ avec $\theta = \frac{\ell\pi}{n+1}$
Alors $r_1r_2 = \frac{c}{b} \Rightarrow r_1^2 exp(-2i\theta) = \frac{c}{b} \Rightarrow r_1^2 = \frac{c}{b}exp(2i\theta)$ Choisissons ρ un complexe dont le carré vaut bc (un tel ρ existe et est non nul car $bc\neq 0$)
Alors $r_1^2 = \frac{bc}{b^2}exp(2i\theta) = \frac{\rho^2}{b^2}exp(2i\theta) = (\frac{\rho}{b}exp(i\theta))^2$ On en déduit $r_1 = \frac{\rho}{b}exp(i\theta)$ ou $r_1 = -\frac{\rho}{b}exp(i\theta)$
Quitte à changer le signe de ρ on peut supposer que : $r_1 = \frac{\rho}{b}exp(i\theta)$
Alors $r_1 + r_2 = \frac{\rho}{b}exp(i\theta) + exp(-2i\theta)\frac{\rho}{b}exp(i\theta) = \frac{\rho}{b}(exp(i\theta)+exp(-i\theta)) = 2\frac{\rho}{b}cos(\theta)$
Mais $r_1 + r_2 = \frac{\lambda-a}{b}$ et donc $\lambda = a + 2\rho cos(\frac{il\pi}{n+1})$ avec $\rho^2 = bc$

On a bien : $\boxed{\exists \ell\in[\![1;n]\!] \ , \ \exists\rho\in\mathbb{C} \ , \ \rho^2 = bc \text{ et } \lambda = a + 2\rho cos(\frac{il\pi}{n+1})}$

Q12) En reprenant les calculs ci-dessus et en particulier $B = -A$ on a : $x_k = A(r_1^k - r_2^k)$
Mais $r_1 = \frac{\rho}{b}e^{i\theta}$ et $r_2 = \frac{\rho}{b}e^{-i\theta}$ avec $\theta = \frac{\ell\pi}{n+1}$

Alors $x_k = A((\frac{\rho}{b}e^{i\theta})^k - (\frac{\rho}{b}e^{-i\theta})^k) = A(\frac{\rho}{b})^k(e^{ik\theta} - e^{ik\theta}) = A(\frac{\rho}{b})^k 2isin(k\theta) = A(\frac{\rho}{b})^k 2isin(\frac{lk\pi}{n+1})$
En posant $\alpha = A$ on a le résultat voulu.

Donc $\boxed{\exists\alpha \in \mathbb{C} \ , \ x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}sin(\frac{lk\pi}{n+1})}$

Q13) Les n valeurs de $[\![1, n]\!]$ donne n valeurs propres distinctes $\lambda_\ell = a + 2\rho cos(\frac{il\pi}{n+1})$ (par injectivité de cos sur $[0, \pi]$) et comme $A(a, b, c) \in M_n(\mathbb{C})$ ont a toutes les valeurs propres de $A(a, b, c)$ qui est donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$.
Avec Q12) ont a même les sous-espaces propres.

Q14) On remarque que : $M_n = T(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ avec $t_1 = 1$ et $t_i = 0$ si $i \neq 1$
et que $M_n^2 = T(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ avec $t_2 = 1$ et $t_i = 0$ si $i \neq 2$
donc que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $M_n = T(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ avec $t_k = 1$ et $t_i = 0$ si $i \neq k$

On remarque aussi que $M_n^n = I_n$ et donc :
$\boxed{M \text{ est inversible et } M_n^{-1} = M_n^{n-1} \quad , \quad X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M_n}$

Q15) $X^n - 1$ est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ et est un polynôme annulateur de M_n donc
$\boxed{M_n \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C})}$

Remarque : on s'inspire de la question suivante ...

$$\text{Posons } \forall k \in [\![0, n-1]\!] \ , X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ (\omega_n^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega_n^k)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } M_n X_k = \begin{pmatrix} \omega_n^k \\ (\omega_n^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega_n^k)^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_n^k \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ (\omega_n^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega_n^k)^{n-1} \end{pmatrix} = \omega_n^k X_k$$

Comme X_k est non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre ω_n^k

On a donc trouvé une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

$\boxed{(X_0, \ldots, X_{n-1}) \text{ est donc une base de vecteurs propres de } M_n}$

Q16) La matrice Φ_n est la matrice de passage de la base caninique à la base $(X_0, \ldots, X_{n-1})$, par la formule de changement de base on a, en utilisant $M_n X_k = \omega_n^k X_k$ que $\boxed{\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = diag(1, \omega_n, \ldots, \omega_n^{n-1})}$

Q17) D'après le calculs de Q14) : $\boxed{A = T(t_1, t_2, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) = P(M_n) \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k}$

Q18) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors la division euclidienne de P par $X^n - 1$ donne :
$P(X) = Q(X)(X^n - 1) + \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $(t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$
En évaluant en $X = M_n$ on a, puisque $M_n^n - I_n = 0$: $P(M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k = T(t_1, t_2, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1})$

$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}[X] \ , \ P(M_n) \text{ est donc bien une matrice circulante.}}$

Q19) • Notons C_n l'ensemble des matrices circulantes de $M_n(\mathbb{R})$.
On remarque déjà que $C_n \subset Toep_n$.
De plus, par Q17 et Q18) $C_n = Vect((M_n^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]})$ et donc C_n est un sous-espace vectoriel de $Toep_n$.

• Soit A et B deux matrices de C_n, alors on écrit $A = P(M_n)$ et $B = Q(M_n)$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.
Alors $AB = P(M_n)Q(M_n) = PQ(M_n)$ et donc $AB \in C_n$ par la question Q18).
On a bien C_n stable par produit.

• Soit $A \in C_n$, alors par Q17) $A = P(M_n)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$
On remarque que $M_n^T = M_n^{n-1}$ et donc $A^T = (P(M_n))^T = P(M_n^T) = P(M_n^{n-1}) = Q(X)$ avec $Q(X) = P(X^{-1})$
Alors, avec Q18) on a bien $A^T \in C_n$. On a bien C_n est stable par transposition.

Bilan : $\boxed{C_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } Toep_n \text{ stable par produit et transposition.}}$

Q20) M_n est diagonalisable par Q15) dont on reprend les notations.
De plus $M_n X_k = \omega_n^k X_k \Rightarrow P(M_n)X_k = P(\omega_n^k)X_k$ et donc $P(M_n)$ est diagonalisable dans la même base que M_n.
Comme C_n est l'ensemble des matrices de la forme $P(M_n)$ alors
$\boxed{\text{toute les matrices circulantes sont diagonalisables.}}$

La base des vecteurs propres est celle trouvée en Q15) et l'ensemble des valeurs propres est : $\{P(w_n^k) \ , \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$

Q21) Montrons $i) \Rightarrow ii)$
On note $B = (x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$
Comme $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $f_M(f^k(x_0)) = f_M^{k+1}(x_0)$ et que les $f_M^k(x_0)$ sont les vecteurs de la base B, alors en écrivant $f_M(f^{n-1}(x_0)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f_M^k(x_0)$ on a f_M qui a pour matrice dans B la matrice $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$

Réciproquement, montrons $ii) \Rightarrow i)$
Si M est semblable à $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ alors, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle f_M à cette matrice.
On pose alors $x_0 = e_1$, et en lisant $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ on voit que $e_2 = f_M(e_1) = f_M(x_0)$, $e_3 = f_M(e_2) = f_M^2(x_0)$, ... , $f_M(e_{n-1}) = f_M(e_{n-2}) = f_M(f_M^{n-2}(x_0)) = f_M^{n-1}(x_0)$
On en déduit l'existence de x_0 tel que $B = (x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

On a donc montrer que : $\boxed{i \Leftrightarrow ii)}$

Q22) $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i e_i \Rightarrow f_M(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \lambda_i e_i \Rightarrow f_M^2(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 u_i e_i....$

La matrice de $(u, f_M(u),_d ots, f_m^{n-1}(u))$ relativement à $(e_1, \dots, e_n)$ est donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & u_1\lambda_1 & \dots & u_1\lambda_n^{n-1} \\ 1 & u_2\lambda_2 & \dots & u_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_n\lambda_n & \dots & u_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$
et on reconnaît presque une matrice de Vandermonde.

En factorisant la ième ligne par u_i on a $det(Q) = (\prod\limits_{i=1}^{n} u_i) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$

On utilise le cours sur Vandermonde pour obtenir : $det(Q) = (\prod\limits_{i=1}^{n} u_i) \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)$

Pour que le déterminant de cette matrice soit non nul il faut que les λ_i soient distincts et qu'aucun u_i ne soit nul.

Bilan : $\boxed{(u, f_M(u), \dots, f_m^{n-1}(u)) \text{ est une base de } \mathbb{C}^n \Leftrightarrow \text{les } \lambda_i \text{ sont distincts, et les } u_i \text{ sont non nuls.}}$

Q23) Si les λ_i ne sont pas distinctes alors, par Q22) on ne peut pas trouver de vecteur cyclique. Réciproquement si les λ_i sont distinctes alors $u = e_1 + \dots + e_n$ est un vecteur cyclique et donc f_M est cyclique.

$\boxed{\text{Un endomorphisme diagonalisable est cyclique si et seulement il admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$

$\boxed{\text{Ses vecteurs cycliques sont alors les vecteurs } u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i e_i \text{ avec } \prod\limits_{i=1}^{n} u_i \neq 0}$

Q24) Posons $C = C(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Alors son polynôme caractéristique vaut :
$\chi_C = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Remarque : c'est le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon, le résultat se montre par récurrence, voir exos corrigés du chapitre sur le déterminant...

On a alors λ valeur propre de $C \Leftrightarrow \chi_C(\lambda) = 0$

Remarque : on a pas utiliser le système proposé (ce qui est possible)... mais on a le résultat ...

Ecrivons le système quand même (résultat utile en Q25))

On pose $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$

Alors $CX = \lambda X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \ldots \\ x_k + a_k x_n = \lambda x_{k+1} \\ \ldots \\ x_{n-2} + a_{n-2} x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n \\ \ldots \\ x_k = \lambda x_{k+1} - a_k x_n \\ \ldots \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - a_{n-2} x_n \\ x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n \\ \ldots \\ x_k = \lambda x_{k+1} - a_k x_n \\ \ldots \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}) x_n \\ x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \end{cases}$$

On remonte jusqu'à avoir : $\begin{cases} a_0 x_n = (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - ..a_1) x_n \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n \\ \ldots \\ \ldots \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}) x_n \\ x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \end{cases}$

Si $x_n = 0$ alors tout les x_i sont nuls et X est nul, ce qui contredit le fait que c'est un vecteur propre, donc $x_n \neq 0$
Et on a alors, en simplifiant la première équation par x_n : $\lambda^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = 0$
On remarque de plus, que le sous espace propre associé est forcément de dimension 1.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } C \Leftrightarrow \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k = 0}$$

Q25) Le calcul de Q23) permet de voir que si $\lambda \in sp(C)$ alors :

$$\boxed{ker(C - \lambda I_n) = vect(\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1 \\ \vdots \\ \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2} \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix})}$$

Q26) Comme les sous espace propres de C sont de dimension 1, alors C est diagonalisable si et seulement si C admet n valeurs propres distinctes.

$\boxed{\text{Un endomorphisme cyclique est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{il admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}$

Remarque : réciproque évidente

Q27) On utilise Q2) en prenant $Q(X) = X$,$P = P$ et $A = B = M$. On a donc A et B qui commutent et on en déduit que que $P(M)$ et M commutent
En revenant aux endomorphismes f_M et $P(f_M)$ commutent et donc $\boxed{P(f_M) \in \mathscr{C}(f(M))}$

Q28) On écrit $g(x_0)$ dans la base proposée : $g(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)$
On compose par f_M^i et comme f_M^i et g commutent (puisque f_M et g commutent)
on a : $f_M^i(g(x_0)) = g(f_M^i(x_0)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(f_M^i(x_0)) = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k\Big)(f_M^i(x_0))$

On a donc g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k$ qui coïncident sur une base, par linéarité on a donc : $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_k f_M^k$

Donc $\boxed{\text{si } g \text{ commutent avec } f_M, \ g \text{ s'écrit } \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k}$

Q29) Q27) et Q28) démontrent les deux inclusions permettant d'affirmer que :
$\boxed{\mathscr{C}(f_M) \text{ est l'ensemble des polynômes en } f_M}$

Q30) N est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale et donc $\boxed{sp(N) = \{0\}}$

Comme N est clairement de rang $n-1$, alors, par le théorème du rang on a $dim(ker(N)) = 1$

$(0, \dots, 0, 1)^T$ est clairement dans $ker(N)$ donc $\boxed{ker(N) = Vect((0, \dots, 0, 1)^T)}$

N admet une seule valeur propre et n'est pas diagonale donc $\boxed{N \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Q31) Si on prend $x_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$ alors $(x_0, Nx_0, \dots, N^{n-1}(x_0))$ est la base canonique, donc c'est une base et donc $\boxed{N \text{ est cyclique}}$

Remarque : on peut faire plus rapide en remarquant que $N = C(0, \dots, 0)$

Q32) On utilise Q29), en remarquant que les puissances de N sont des matrices de 0, sauf une sous diagonale de 1, alors les matrices commutant avec N sont de la forme $T(t_{-n+1}, \dots, t_1, 0, \dots, 0)$ et on a bien :

$\boxed{\mathscr{C}(N) \text{ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.}}$

Q33) Notons $A=(a_{p,q})\in\Delta_i$ et $B=(a_{p,q})\in\Delta_j$. On pose $C=AB=(c_{p,q})$
Alors par définition du produit matriciel : $c_{p,q}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{p,k}b_{k,q}$
Supposons que : $q-p\neq i+j$

Comme $A\in\Delta_i$ alors $k-p\neq i\Leftrightarrow k\neq p+i\Rightarrow a_{p,k}=0$ donc (par contraposée), dans la somme ci-dessus, seul $a_{p,i+p}$ est éventuellement non nul.
Il rest alors : $c_{p,q}=a_{p,i+p}b_{i+p,q}$

Mais $q-(i+p)=q-p-i\neq j$ par hypothèse donc $b_{i+p,q}=0$ et il reste $c_{p,q}=0$

On a donc $q-p\neq i+j\Rightarrow c_{p,q}=0$ et on a bien $C\in\Delta_{i+j}$

Bilan : $\boxed{A\in\Delta_i\ ,\ B\in\Delta_j\Rightarrow AB\in\Delta_{i+j}}$

Q34) Soit $A\in H_i$ et $B\in H_j$, on écrit : $A=\sum\limits_{p=i}^{n-1}a_p\tilde{A}_p$ avec $\tilde{A}_p\in\Delta_p$ et $B=\sum\limits_{j=k}^{n-1}b_p\tilde{B}_q$ avec $\tilde{B}_q\in\Delta_q$

Alors $AB=\sum\limits_{p=i}^{n-1}\sum\limits_{q=j}^{n-1}a_pb_q\tilde{A}_p\tilde{B}_q$

Mais $\tilde{A}_p\tilde{B}_q\in\Delta_{p+q}$ mais $p\geq i$ et $q\geq j$ donc $p+q\geq i+j$ et donc $\tilde{A}_p\tilde{B}_q\in H_{i+j}$
Comme H_{i+j} est un espace vectoriel, par combinaison linéaire $AB\in H_{i+j}$

Bilan : $\boxed{A\in H_i\ ,\ B\in H_j\Rightarrow AB\in H_{i+j}}$

Q35) $(I_n+C)(I_n-C+C^2+\cdots+(-1)^{n-1}C^{n-1})$
$=(I_n-C+C^2+\cdots+(-1)^{n-1}C^{n-1})+(C-C^2+C^3+\cdots+(-1)^{n-2}C^{n-1}+0)$ car $C^n=0$
Par téléscopage on a : $(I_n+C)(I_n-C+C^2+\cdots+(-1)^{n-1}C^{n-1})=I_n$ et donc
$\boxed{I_n+C \text{ est inversible et } (I_n+C)^{-1}=I_n-C+C^2+\cdots+(-1)^{n-1}C^{n-1}}$

Q36) Par Q35), P est bien inversible et $P^{-1}\in vect(I,C,C^2,\ldots,C^{n-1})$.
Avec Q33) chaque C^p est dans $\Delta_{p(k+1)}$ donc $P^{-1}\in\bigoplus\limits_{p=0}^{n-1}\Delta_{p(k+1)}$

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1}\in\bigoplus_{p=0}^{n-1}\Delta_{p(k+1)}}$$

Q37) Avec Q36) on écrit $P^{-1}=I_n+Q$ avec $Q\in\bigoplus\limits_{p=1}^{n-1}\Delta_{p(k+1)}\subset H_{k+1}$

Donc $\varphi(M)-M$
$=P^{-1}MP-M$
$=(I_n+Q)M(I_n+C)-M$
$=(M+QM)(I_n+C)-M$
$=M+MC+QM+QMC-M$
$=MC+QM+QMC$

$M \in \Delta_i$ et $C \in \Delta_{k+1}$ donc $MC \in \Delta_{i+k+1} \subset H_{k+1}$

$M \in \Delta_i$ et $Q \in H_{k+1}$ donc $QM \in \Delta_{i+k+1} \subset H_{k+1}$

et enfin, de même, $QMC \in \Delta_{i+k+1} \subset H_{k+1}$

Alors par combinaison linéaire : $M' = \varphi(M) - M \in H_{k+1}$

On a donc : $\boxed{\exists M' \in H_{k+1}\ \varphi(M) = M + M'}$

Q38) $\varphi(N) - N + CN - NC$
$= P^{-1}NP - N + CN - NC$
$= (I_n + Q)N(I_n + C) - N + CN - NC$
$= N + NC + QN + QNC - N + CN - NC$
$= QN + QNC + CN$
$= (Q + C)N + QNC$

Mais $Q + C = C^2 - C^3 + .. \in H_{2(k+1)} \subset H_{k+1}$ et $N \in H_{2(k+1)-1} = H_{2k+1} \subset H_{k+1}$

On a donc : $\boxed{\exists N' \in H_{k+1}\ \varphi(N) = N + NC - CN + N'}$

Q39) Déjà, $B = \varphi(A) = P^{-1}AP$, avec $P^{-1} \in H_0$, $A \in H_{-1}$ et $P \in H_0$, donc (question 34) : $\boxed{B \in H_{-1}}$

On peut ensuite écrire $T = \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^{(i)}$, et la propriété $\varphi(M) - M \in H_{k+1}$ reste vraie dès que $M \in \Delta_i$ avec $i \geq 0$ (reprendre la preuve : la condition $i \leq k$ est inutile), donc $\varphi(T) - T \in H_{k+1}$. Ainsi :

$$B = \varphi(N) + \varphi(T) = A + (NC - CN) + B',$$

avec $B' \in H_{k+1}$.
Bien entendu pour $i \leq k$, $B'^{(i)} = 0$; il reste donc à montrer :

$$(NC - CN)^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 \leq i \leq k-1 \\ NC - CN & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

ce qui revient à dire que $NC - CN \in \Delta_k$. Mais puisque $N \in \Delta_{-1}$ et $C \in \Delta_{k+1}$, c'est une conséquence directe de la question 33. $\boxed{B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN, \text{ et pour tout } i \in [\![-1, k-1]\!],\ B^{(i)} = A^{(i)}.}$

Q40) $X \in ker(S) \Leftrightarrow NX - XN = 0 \Leftrightarrow NX = XN$
$ker(S)$ est donc le commutant de N qui est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaire inférieure d'après Q32).

Q41) Soit $X \in \Delta_{k+1}$: $\mathscr{S}(X) = NX - XN$ et $N \in \Delta_{-1}$; la question 33 nous assure que $\mathscr{S}(X)$ est la différence de deux éléments de $\Delta_{(k+1)-1}$ donc est dans Δ_k. En notant que ${}^tN \in \Delta_1$ on montre la deuxième inclusion demandée. $\boxed{\mathscr{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k \text{ et } \mathscr{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}.}$

On suppose désormais que : $0 \leq k \leq n-1$

Q42) Fixons $X \in \Delta_{k+1}$ et $Y \in \Delta_k$: d'une part

$$< \mathscr{S}_{k+1}(X), Y >= tr({}^t(NX - XN)Y) = tr({}^tX{}^tNY) - tr({}^tN{}^tXY)$$

et d'autre part :

$$< X, \mathscr{S}_k^*(Y) >= tr({}^tX({}^tNY - Y{}^tN))) = tr({}^tX{}^tNY) - tr({}^tXY{}^tN)$$

Mais

$$tr({}^tN{}^tXY) = tr({}^tN({}^tXY)) = tr(({}^tXY){}^tN) = tr({}^tXY{}^tN)$$

donc : $\boxed{\text{Pour } X \in \Delta_{k+1} \text{ et } Y \in \Delta_k : < \mathscr{S}_{k+1}(X), Y >=< X, \mathscr{S}_k^*(Y) >}$

Prenons alors $A \in \ker(\mathscr{S}_k^*)$ et $B \in Im(\mathscr{S}_{k+1})$. Il existe $X \in \Delta_{k+1}$ tel que $B = \mathscr{S}_{k+1}(X)$, et on a donc :

$$< A, B >=< A, \mathscr{S}_{k+1}(X) >=< \mathscr{S}_{k+1}(X), A >=< X, \mathscr{S}_k^*(A) >= 0$$

car $A \in ker(\mathscr{S}_k^*)$. $\boxed{ker(\mathscr{S}_k^*) \text{ et } Im(\mathscr{S}_{k+1}) \text{ sont en somme directe orthogonale.}}$

Ensuite, $\ker(\mathscr{S}_k^*)$ est bien un sous-espace de Δ_k par définition, ainsi que $Im(\mathscr{S}_{k+1})$ (question 41) : $(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k)$; il reste donc à vérifier que la somme de leurs dimensions vaut celle de Δ_k, à savoir $n-k$.

— $ker(\mathscr{S}_k^*) = ker(\mathscr{S}^*) \cap \Delta_k$ est la droite engendrée par D_k, donc est de dimension 1 ;

— $Im(\mathscr{S}_{k+1})$ est de dimension :

$$\dim(\Delta_{k+1}) - \dim(ker(\mathscr{S}_{k+1})) = (n-(k+1)) - \underbrace{dim(ker(\mathscr{S}) \cap \Delta_{k+1})}_{0} = n-k-1$$

($\ker(\mathscr{S}) \cap \Delta_{k+1}$ est constitué des matrices triangulaires inférieures qui sont dans Δ_{k+1}, ce qui est un tout petit espace).

On a bien $dim(\ker(\mathscr{S}_k^*)) + dim(Im(\mathscr{S}_{k+1})) = dim(\Delta_k)$, ce qui permet de conclure puisque les deux sous-espaces sont en somme directe (orthogonale) : $\boxed{\Delta_k = ker(\mathscr{S}_k^*) \oplus^\perp Im(\mathscr{S}_{k+1})}$

Q43) Avec un peu de hauteur, on voit qu'il suffit (partie III.B.1) de construire $C \in \Delta_{k+1}$ (ce qui nous laisse $n-(k+1)$ degrés de liberté) tel que $A^{(k)} + NC - CN$ ait ses $n-k$ éléments diagonaux d'ordre k égaux, ce qui fait... $n-k-1$ équations (ça sent bon). Si on y arrive, alors en posant $P = I_n + C$ on aura $B = \varphi(A) = P^{-1}AP$ qui vérifiera exactement les conditions souhaitées sur les diagonales d'ordre $i \in [\![-1, k]\!]$.
Observons donc $A^{(k)}$: cette matrice est dans Δ_k, donc la question précédente nous donne l'existence de $C_1 \in \Delta_{k+1}$ tel que $A^{(k)} - (NC_1 - C_1N)$ soit dans $ker(_k^*)$, c'est-à-dire dans $Vect(D_k)$. Considérons alors $P = I_n - C_1$. La partie III.B.1 nous assure que $B = P^{-1}AP$ vérifie : pour tout $i \in [\![-1, k-1]\!]$, $B^{(i)} = A^{(i)}$, et $B^{(k)} = A^{(k)} - NC_1 + C_1N$, donc $B^{(k)} \in Vect(D_k)$ possède comme requis tous ses coefficients diagonaux d'ordre k égaux... $\boxed{\text{Ce qu'on voulait démontrer !}}$

Q44) Il suffit évidemment de montrer que toute matrice cyclique $A_0 = C(a_0, ..., a_{n-1})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

— On applique le résultat de la question précédente à A_0 (qui est bien de la forme $N+T$) avec $k=0$: A_0 est semblable à une matrice de la forme $A_1 = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ 1 & a_0 & & \star & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 & a_0 \end{pmatrix}$

— On applique le résultat de la question précédente à A_1 (qui est toujours de la forme $N+T$) avec cette fois $k=1$: A_1 (donc A_0) est semblable à une matrice de la forme $A_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1' & & & \star \\ 1 & a_0 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_1' \\ (0) & & 0 & 1 & a_0 \end{pmatrix}$

— On continue ainsi en appliquant le résultat de la question précédente à la matrice obtenue à l'étape précédente, pour k allant jusqu'à $n-1$, et $C(a_0, ..., a_{n-1}) = A_0$ est finalement semblable à une matrice de Toeplitz.

$\boxed{\text{Toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.}}$