Feuille d'exercices n°50 : Chapitre 18

Exercice 403. *a) Montrer que :* $A = \int_0^{+\infty} \frac{exp(-t)}{\sqrt{t}} dt$ *est convergente.*

On admet que : $A = \sqrt{\pi}$

On pose : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{exp(-t)}{\sqrt{t}} exp(ixt) dt$

b) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$

c) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f

d) Déterminer $f(x)$ *à l'aide des fonctions usuelles.*

Exercice 404. *a) Donner l'ensemble de définition de :* $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{exp(-xt)}{1+t^2} dt$

b) Montrer que F *est continue sur son domaine de définition.*

c) Calculer $F(0)$

d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

e) Montrer que F *est de classe* C^k *sur l'intérieur de son domaine de définition.*

f) $(\star)$ *Montrer que* F *n'est pas dérivable en* 0.

Exercice 405. *Montrer que* $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-cos(xt)}{t^2} exp(-t) dt$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *et en déduire une expressions de* g.

Exercice 406. $(\star)$ *Théorème de Fubini*

Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ *une application continue.*

On pose, pour $x \in [a, b]$ *:* $H(x) = \int_a^x (\int_c^d f(t, y) dy) dt$ *et* $G(x) = \int_c^d (\int_a^x f(t, y) dt) dy$

En utilisant la fonction G *et la fonction* H*, montrer que :*

$$\int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx = \int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx) dy$$

Exercice 407. *Complément sur la fonction* Γ

On rappelle que la fonction Γ *est définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

On adéjà vu que : $\forall x > 0 \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$, Γ *est de classe* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$ *et* $\forall x > 0$, $\Gamma^{(k)} = \int_0^{+\infty} (ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$

a) Montrer que $\Gamma'' > 0$ *et en déduire que* Γ' *s'annule au plus une fois.*

b) Montrer que Γ' *s'annule sur* $]1, 2[$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x\Gamma(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.

d) En déduire l'allure du graphe de Γ