Chapitre 19 : Variables aléatoires partie 1
Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Préambule et premier exemple

1.1.1 Blabla

Lors d'une expérience aléatoire, on peut être amené à donné à chaque événements une caractéristique. Par exemple, au poker Texas holdem, on peut être ammené à jugé chaque tirage (2 cartes parmis 52) comme mauvais, jouable, bon, excellent ou encore on peut s'intéresser au nombre d'habillés ou encore au nombre de cœur ....

1.1.2 Exemple

On prend un jeu de 52 cartes et on tire 2 cartes sans remise.
On prend comme univers Ω l'ensemble des tirages possibles et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
En supposant tout les tirages équiprobables on peut munir $(\Omega, \mathscr{A})$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

Si on note X le nombre de coeur pour un tirage on peut s'intéresser aux événements : $A_0 =$ "ne tirer aucun cœur", $A_1 =$ "tirer un seul cœur"et $A_2 =$ "tirer deux cœur"

On calcul alors : $\mathbb{P}(A_0) = \frac{\binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{19}{34}$, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{13}{34}$ et $\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{17}$

On remarque que : $\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 1$ ce qui est logique puisque (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'événements.

1.2 Définition

Définition. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et E un ensemble.*
On appelle **variable aléatoire discrète** *sur Ω toute application X de Ω dans E telle que :*
- *$X(\Omega)$ est au plus dénombrable*
- *$\forall x \in X(\Omega)$ on a $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$*

Remarques. *X est une application et donc n'est pas une variable, de plus X ne dépend pas d'une probabilité et n'a rien d'aléatoire ! ! Le nom est "historique".*
$X(\Omega)$ est finie (cas de sup) ou dénombrable.
Dans le cas du programme les variables aléatoires sont discrètes, souvent on dira juste variable aléatoire au lieu de variable aléatoire discrète.
X^{-1} n'est pas la bijection réciproque de X mais l'application (ensembliste) réciproque.

Si de plus $E = \mathbb{R}$ on parle de variable aléatoire réelle discrète.
On a $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ , \ X(\omega) \in A\}$ et en particulier $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \ , \ X(\omega) = x\}$

1.3 Evénements liés à une variable aléatoire.

1.3.1 Lemme et notations

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $X^{-1}(A)$ est un événement.
Cet événement est aussi noté : $X \in A$ ou encore $(X \in A)$ ou encore $\{X \in A\}$.

preuve :

1.3.2 Cas particuliers

Si $E=\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$ alors on peut considérer les événements :
$$\begin{cases}(X\in\{x\})=(X=x)=\{\omega\in\Omega\ ,\ X(\omega)=x\}=X^{-1}(\{x\})\\(X\in]-\infty,x])=(X\leq x)=\{\omega\in\Omega\ ,\ X(\omega)\leq x\}=X^{-1}(]-\infty;x])\\(X\in]-\infty,x[)=(X<x)=\{\omega\in\Omega\ ,\ X(\omega)<x\}=X^{-1}(]-\infty;x[)\\(X\in[x,\infty[)=(X\geq x)=\{\omega\in\Omega\ ,\ X(\omega)\geq x\}=X^{-1}([x;+\infty[)\\(X\in]x,+\infty[)=(X>x)=\{\omega\in\Omega\ ,\ X(\omega)>x\}=X^{-1}(]x;+\infty[)\end{cases}$$
On peut alors écrire par exemple : $(X\leq x)=(X<x)\cup(X=x)$.

1.3.3 Retour sur l'exemple

On peut considérer la variable aléatoire X qui donne le nombre de coeur d'un tirage de 2 cartes parmis 52.
On peut alors considérer les événements : $(X=0)=A_0$, $(X=1)=A_1$ et $(X=2)=A_2$.
Mais aussi $(X>0)=(X=1)\cup(X=2)$ etc ...

1.3.4 Propriétés

Propriétés. *Soit X une variable aléatoire de $(\Omega,\mathscr{A})$, un espace probabilisable, dans E. Alors :*
i) $(X\in E)=\Omega$ et $(X\in\emptyset)=\emptyset$
ii) $\forall A\in\mathscr{P}(E)$, $(X\in\overline{A})=\overline{(X\in A)}$
iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrables de parties de E alors :
$(X\in\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(X\in A_i)$ *et* $(X\in\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(X\in A_i)$

preuve :

1.4 Système complet d'événements associés à une variable aléatoire

1.4.1 Système complet d'événement

Lemme. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire discrète de Ω dans E. Alors la famille $(\{X=x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé* **système complet d'événements associé à X.**

preuve :

1.4.2 Retour sur l'exemple

On a : $X(\Omega)=\{0,1,2\}$ et le système complet d'événements associé à X
est $(A_0,A_1,A_2)=((X=0),(X=1),(X=2))$

1.5 Variables aléatoires particulières

1.5.1 Variable aléatoire certaine

Définition. *Si $a\in\mathbb{R}$ on peut considérer la variable aléatoire X_a : $\begin{cases}\Omega\to\mathbb{R}\\\omega\mapsto a\end{cases}$.*
X_a est appelée **variable aléatoire constante ou certaine.**

On a alors $X(\Omega)=\{a\}$ et le système complet d'événements associé est (Ω)

1.5.2 Variable aléatoire associé à un événements

Définition. *Si A est un événement de $\mathscr{A}$ alors l'application 1_A : $\begin{cases}\Omega\to\mathbb{R}\\\omega\mapsto\begin{cases}1\ si\ \omega\in A\\0\ si\ \omega\notin A\end{cases}\end{cases}$ est une variable aléatoire appelée* **variable indicatrice de A**

Si $A\in\mathscr{A}$ alors $1_A(\Omega)=\{0,1\}$ et le système complet d'événement associé à 1_A est $(A,\overline{A})$.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

2.1 Théorème

Théorème . *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *est une variable aléatoire discrète de* Ω *dans* E.
Alors l'application : $\begin{array}{rccc} P_X & : & \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0;1] \\ & & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$ *est une probabilité sur l'espace probabilisable* $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$ *appelée* ***loi de probabilité de X***.

preuve :

Remarques. $\mathbb{P}(X \in A)$ *désigne la probabilité de l'événement* $(X \in A)$.
La loi de probabilité de X *dépend de la probabilité* $\mathbb{P}$ *alors que la variable aléatoire* X *peut-être définie sans connaître* $\mathbb{P}$.

2.2 Détermination de la loi de X

2.2.1 Propriété

Lemme. *Si* X *est une variable aléatoire sur* Ω*, la loi de* X *est déterminée par la donnée de :*
$$\begin{cases} X(\Omega) \\ \forall x \in X(\Omega) \ , \ P_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$$

Remarque. *En particulier, si* $A \subset X(\Omega)$, $P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$

preuve :

2.2.2 Vocabulaire

Compte tenu de la propriété vue au paragraphe précédent :
déterminer la loi de X revient à déterminer $X(\Omega)$ et la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout x dans $X(\Omega)$.

2.3 Exemples

2.3.1 Exemple 0 : loi de la variable aléatoire certaine

2.3.2 Exemple 1 : loi de la variable aléatoire associé à un événement

2.3.3 Exemple 2 : retour sur l'exemple

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{19}{34}$	$\frac{13}{34}$	$\frac{1}{17}$

2.4 Germe d'une loi de probabilité

2.4.1 Remarques préliminaires

Plus explicitement au programme mais utiliser, sans le nommer, dans plein d'exercices.
Les théorèmes ci-dessous permettent d'étudier des lois sans décrire complétement l'expérience sous-jacente. On peut ainsi escamoter l'univers Ω et sa probabilité au profit de la seule loi de la variable aléatoire X.

2.4.2 Théorème

Théorème . *Soit* Ω *un univers au plus dénombrable et* I *un ensemble non vide au plus dénombrable.*
Soit $(p_n)_{n \in I}$ *une famille sommable de nombres réels positifs telle que :* $\sum_I p_n = 1$
Soit $(x_n)_{n \in I} \in \mathbb{R}^I$ *une famille de nombres réels.*
Alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ *sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *et une variable aléatoire réelle* X *sur* Ω *telles que :*
$X(\Omega) = (x_n)_{n \in I}$ *et* $\forall n \in I$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

preuve : HP

2.4.3 Exemple

La suite $(\frac{1}{en!})_{n \in \mathbb{N}}$ définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2.5 Image par une application

Dans ce paragraphe, conformément au programme, aucune difficulté théorique n'est soulevée.

2.5.1 Théorème 1

Théorème . *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *est une variable aléatoire discrète de* Ω *dans* E.
Soit f *une application de* E *dans* F.
Alors l'application $f \circ X$ *est une variable aléatoire discrète notée abusivement* $f(X)$

preuve : admis selon le programme

Remarques. *On a :* $\begin{array}{cccc} f \circ X & : & \Omega & \longmapsto & F \\ & & \omega & \longrightarrow & f(X(\omega)) \end{array}$
Par exemple, si X *est à valeur réelles alors* $|X|$, X^2 *et* $exp(X^3)$ *sont des variables aléatoires.*

Exemple. *On lance un dé à 6 faces équilibrée et on note* X *la variable aléatoire égale au résultat du lancer.*
Déterminons la loi de $Y = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$

2.5.2 Notations

Si X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi, on note $X \sim Y$

2.5.3 Théorème 2

Théorème . *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires de* Ω *dans* E *suivant la même loi alors* $f(X)$ *et* $f(Y)$ *suivent la même loi.*

preuve : admis selon le programme

Remarque. *Autrement dit :* $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$

3 Lois usuelles de références

3.1 Loi uniforme

3.1.1 Situation type

Cette loi traduit le fait de choisir un élément "au hasard", de manière équiprobable , dans un ensemble fini d'éléments.
Par exemple : tirage d'un dé à six faces ou tirage **équiprobable** d'une boule dans une urne.

3.1.2 Définition

Définition. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* E *un ensemble fini de cardinal* n. *Alors on dit que* X *suit la loi uniforme sur* E
ssi $\begin{cases} X(\Omega) = E \\ \forall e \in E \ , \ \mathbb{P}(X \in \{e\}) = \frac{1}{n} \end{cases}$

Notation. *On note* $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$ *la proposition* X *suit la uniforme sur* E.

Remarque. *Une variable aléatoire qui peut prend* n *valeurs distinctes de manières équiprobables suit une loi uniforme.*

3.1.3 Exemple

Soit X la variable aléatoire donnant le résultat du lancer d'un dé à 6 faces équilibré. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;6]\!])$.
On a donc : $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et $\forall k \in X(\Omega) \ , \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$

3.2 Loi de Bernoulli

3.2.1 Situation type

La loi de Bernoulli apparaît quand, dans une expérience aléatoire, on ne s'intéresse qu'à la réalisation ou non d'un événement. Expérience de type succès-échec.
En général on code le succès par 1 et l'échec par 0. On a donc une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$.

3.2.2 Définition

Définition. *Soit $p \in]0;1[$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p*

$$ssi \begin{cases} X(\Omega) = \{0;1\} \\ \mathbb{P}(X = 1) = p \end{cases}$$

Notation. *On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ la proposition "X suit la loi de Bernoulli de paramètre p", on dit aussi que X est une variable de Bernoulli.*

Remarque. *On a alors forcément : $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.*

3.2.3 Exemple

Lancer d'une pièce de monnaie et obtention d'un "face".

3.3 Loi Binomiale

3.3.1 Situation type

La loi binomiale apparaît quand on considère le nombre X de succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p (schéma de Bernoulli).

3.3.2 Exemple

On lance n fois de suites, de manière indépendante, une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est de $p \in]0;1[$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pile parmi les n lancers.
Etude de la loi de X :
... ...

3.3.3 Définition

Définition. *Soit $p \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p)*

$$ssi \begin{cases} X(\Omega) = [\![0..n]\!] \\ \forall k \in [\![0..n]\!] \ , \ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

Notation. *On note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ la proposition "X suit la loi de Binomiale de paramètre (n, p)"*

3.4 Loi géométrique

3.4.1 Situation type

On procède à une succession d'expérience de type succès-échec jusqu'à obtenir un succès. les expériences sont supposées indépendantes et de même probabilité $p \in]0;1[$.
La variable aléatoire qui nous intéresse est X le temps d'attente du premier succès
On peut interpréter cette expérience comme une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.

3.4.2 Exemple

On considère une pièce qui donne PILE avec une probabilité $p \in]0;1[$.
On lance cette pièce (les lancers étant indépendants) et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancer effectués pour obtenir le premier PILE.

Etude de X :

3.4.3 Définition

Définition. *Soit* $p \in]0;1[$. *On dit qu'une variable aléatoire* X *suit une loi géométrique de paramètre* p *sur* $\mathbb{N}^*$ *si et seulement si* $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \end{cases}$

Notation. *On note* $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ *la proposition "*X *suit la loi de géométrique de paramètre* p *sur* $\mathbb{N}^*$*"*

3.5 Loi de Poisson

3.5.1 Situation type

Introduite par Poisson dans son ouvrage *Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminel* et popularisée en 1898 par Bortkiewicz.
Pas vraiment de situation type mais elle apparaît dans la modélisation de données statistiques telle que le nombre d'erreurs des messages électroniques.

3.5.2 Mise en œuvre

Soit $T > 0$, on observe le nombre de succès se produisant dans un intervalle de temps donné $[0;T]$. On prend $N \in \mathbb{N}^*$ et on découpe $[0;T]$ en N intervalles de longueur $\frac{T}{N} = \delta t$.
On suppose que :

1. la probabilité d'observer plus de 2 accidents dans l'intervalle $[t; t+\delta t]$ est très faible par rapport à celle d'en observer 1 (on supposera donc un seul succès par intervalle)
2. la probabilité d'observer un succès dans l'intervalle $[t; t+\delta t]$ est proportionnelle à la durée et elle s'écrit : $\mu\delta t$ (on suppose bien sûr $\mu\delta t < 1$)
3. Le nombre de succès intervenant dans n intervalles de temps donnés est indépendant du nombre d'accidents observés durant un intervalle de temps disjoint.

Soit X le nombre d'événement observés sur l'intervalle $[0;T]$. On réalise sur chacun des intervalles $[k\delta t; (k+1)\delta t]$ une expérience de type succès-échec, avec probabilité de succès de $\mu\delta t$. Comme par hypothèse les expériences sur chacun des intervalles son indépendantes, nous en sommes à comptabiliser le nombre de succès au cours de la répétition de N expériences indépendantes avec la probabilité de succès de $\mu\delta t$.

On reconnaît que X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \mu\delta t = \frac{\mu T}{N})$. Ainsi : $\forall n \in [\![0..N]\!]$:
$\mathbb{P}(X = n)$
$= \binom{N}{n}[\mu\delta t)^n(1-\mu\delta t)^{N-n}$
$= \binom{N}{n}(\frac{\mu T}{N})^n(1-\frac{\mu T}{N})^{N-n}$
$= \binom{N}{n}(\frac{\lambda}{N})^n(1-\frac{\lambda}{N-n})^{N-n}$
avec $\lambda = \mu T$.
On va maintenant faire tendre δt vers 0 (ou encore N vers $+\infty$).

Après calculs on a $\mathbb{P}(X = n) \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

On part de ce résultat pour définir la loi de Poisson indépendamment du modèle choisi.

3.5.3 Définition

Définition. *Soit* $\lambda > 0$. *On dit qu'une variable aléatoire* X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ *si et seulement si* $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$

Notation. *On note* $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ *la proposition* X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.

Remarque. *Comme* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = ... = 1$ *on vérifie que l'on a bien une loi de probabilité.*

Sommaire