

Chapitre 18 : Convergence dominée et intégrales à paramètres

Enoncé, Exercice 18.1

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx$

On pourra commencer par montrer que $\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$

Correction

- Commençons par montrer l'inégalité proposée.

On pose $\forall u > -1, A(u) = u - \ln(1+u)$ qui est dérivable sur $] -1, +\infty[$ avec $A'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$

On a donc le tableau de variation suivant :

u	-1	0	1
$A'(u)$		-	+
$A(u)$		↘ 0	↗

On en déduit : $\forall u > -1, A(u) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+u) \leq u$

- Posons maintenant $I =]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{array}{l} f_n : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{n \ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1+x^2)} \end{array}$

Pour $x \in I, f_n(x) = \frac{n \ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1+x^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1+x^2}$

On pose alors : $\forall x \in I, F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ qui est bien continue par morceaux sur I .

On a donc (f_n) converge simplement vers F sur I .

En utilisant l'inégalité démontrée en préambule, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \frac{n \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = F(x)$

Or, pour $A > 0 : \int_0^A F(x) dx = \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, donc F est intégrable sur

I et $\int_0^{+\infty} F(x) dx = \frac{\pi}{2}$

On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} \text{la suite } (f_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite de fonctions continues par morceaux sur } I \\ (f_n)_{n \geq 1} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } F \text{ une fonction continue par morceaux sur } I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq F(x) \text{ et } F \text{ est intégrable sur } I \end{array} \right.$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a :

F et les F_n sont intégrables sur I et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{+\infty} F(x) dx$$

Et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}}$

Enoncé, Exercice 18.2

Démontrer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Correction

Posons $I =]0, 1[$ et $\forall t \in I$, $S(t) = \frac{\ln(t)}{1-t}$

Il est facile de voir que S est continue par morceaux sur I .

Comme d'après le cours sur les séries entières : $\forall t \in I$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ on a : $S(t) = \frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(t)t^n$

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \ln(t)t^n$

Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln(t)t^n dt = [\ln(t) \frac{t^{n+1}}{n+1}]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t} \frac{t^{n+1}}{n+1} dt = 0 - \ln(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^n}{n+1} dt = \ln(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} - [\frac{t^{n+1}}{(n+1)}]_{\varepsilon}^1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(n+1)^2}$$

On en déduit que f_n est continue par morceaux et intégrable sur I et de plus $\int_I f_n = \frac{-1}{(n+1)^2}$

On remarque que $\sum \int_I |f_n| = \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est convergente.

On a alors : $\left\{ \begin{array}{l} \text{les fonctions } f_n \text{ sont continues par morceaux et intégrables sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ converge simplement vers } S \text{ sur } I \text{ et } S \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \sum \int_I |f_n| \text{ est convergente} \end{array} \right.$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on obtient :

$$\sum f_n \text{ et donc } S \text{ est intégrable sur } I, \sum \int_I f_n \text{ est convergente et surtout : } \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$$

Compte tenu des calculs déjà effectués on a : $\int_I S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+1)^2} dt$

On fait un changement d'indice dans la somme de droite et on obtient : $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

En multipliant par -1 on a bien : $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$

Enoncé, Exercice 18.3

Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x+1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{1+k^2}$

Correction

Posons $I = [0, +\infty[$ et $\forall x > 0, S(x) = \frac{\cos(x)}{e^x+1}$

Pour $x \in I$ on a : $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et comme $e^{-x} \in]0, 1[$, on peut utiliser le résultat du cours :
 $\forall u \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k$ avec $u = e^{-x}$

On a donc $\frac{1}{e^x+1} = e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (e^{-x})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(k+1)x}$

En effectuant le changement d'indice $n = k + 1$ et en multipliant par $\cos(x)$ on obtient :

$$\forall x \in I, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x)$$

On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x)$

Etudions l'intégrabilité de f_n sur I . Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned} & \int_0^A f_n(t) dx \\ &= \int_0^A (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x) dx \\ &= \int_0^A (-1)^{n-1} e^{-nx} \operatorname{Re}(e^{ix}) dx \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_0^A (-1)^{n-1} e^{-nx} e^{ix} dx \right) \\ &= (-1)^{n-1} \operatorname{Re} \left(\int_0^A e^{(i-n)x} dx \right) \\ &= (-1)^{n-1} \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(i-n)x}}{i-n} \right]_0^A \right) \\ &= (-1)^{n-1} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(i-n)A}}{i-n} - \frac{1}{i-n} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-i} \right) = (-1)^{n-1} \operatorname{Re} \left(\frac{n+i}{1+n^2} \right) = \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2} \end{aligned}$$

On a donc $\int_I f_n$ convergente et $\int_I f_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$

De plus : $\left| \int_I f_n \right| = \frac{n}{1+n^2} \leq \int_I |f_n|$

$\frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} > 0$, alors par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs, comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, on a : $\sum \frac{n}{1+n^2}$ divergente, et par comparaison $\sum \int_I |f_n|$ est divergente et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme!!!

On va donc passer par les sommes partielles de S .

Posons donc : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(x) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} e^{-nx} \cos(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$

On a déjà démontré que (S_n) convergeait simplement vers S sur I .

De plus comme à $x > 0$ fixé $(e^{-nx})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante tendant vers 0, alors on peut appliquer le théorème spécial à certaines séries alternées et on a : $\forall x \in I$, $|S_N(x)| \leq |f_1(x)|$, comme f_1 est intégrable sur I alors on a l'hypothèse de domination pour la suite (S_N) .

On a : $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (S_N)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de fonctions continues par morceaux sur } I \\ \bullet \text{ convergeant simplement vers la fonction continue par morceaux } S \text{ sur } I \\ \bullet \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |S_N(x)| \leq |f_1(x)| \text{ et } f_1 \text{ est intégrable sur } I \end{array} \right.$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on en déduit : S est intégrable sur I et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_I S_N(t) dt = \int_I \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_I \sum_{n=1}^N f_n(x) dx = \int_I \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_I f_n(x) dx = \int_I S(x) dx$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2} = \int_I S(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1+n^2} = \int_I \frac{\cos(x)}{1+e^x} dx$$

On a donc bien : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x+1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{1+k^2}$

On a la conclusion du théorème d'intégration terme à terme mais celui-ci n'est pas applicable, on a utilisé le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Enoncé, Exercice 18.4

On définit la fonction Gamma d'Euler par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

- a) Donner le domaine de définition I de Γ
- b) Etudier la continuité de Γ
- c) Etudier le caractère C^1 de Γ
- d) Etudier le caractère C^∞ de Γ

Correction

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, étudions la convergence de $\Gamma(x)$.

Comme $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors, il y a éventuellement problème pour l'intégrale aux bornes 0 et $+\infty$.

En 0 : $t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}} > 0$ donc par la règle de l'équivalent pour les intégrales de fonctions positives on a : $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ de même nature que $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ qui est une intégrale de Riemann convergente

si et seulement si $1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$ Donc $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$

En $+\infty$: $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par négligeabilité $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente pour tout $x > 0$

Bilan : $\Gamma(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et donc $\boxed{I =]0, +\infty[}$

b) Posons $f : I^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, ainsi $\forall x \in I$, $\Gamma(x) = \int_I f(x, t)dt$

Soit $[a, b]$ un segment inclus dans I et $x \in [a, b]$.

$x \in [a, b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow a - 1 \leq x - 1 \leq b - 1$

Alors $t \in]0, 1[\Rightarrow \ln(t) < 0$ et donc $a - 1 \leq x - 1 \Rightarrow (a - 1)\ln(t) \geq (x - 1)\ln(t)$, on prend l'exponentielle qui est croissante et on a : $\exp((a - 1)\ln(t)) \geq \exp((x - 1)\ln(t))$ donc $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}$

Alors $t \in [1, +\infty[\Rightarrow \ln(t) \geq 0$ et donc $x - 1 \leq b - 1 \Rightarrow (x - 1)\ln(t) \geq (b - 1)\ln(t)$, on prend l'exponentielle qui est croissante et on a : $\exp((x - 1)\ln(t)) \geq \exp((b - 1)\ln(t))$ donc $0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1}$

On a donc $\forall t \in I, \forall x \in [a, b]$, $\begin{cases} 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ 0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$

Comme $t^{a-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$ et $t^{b-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$ on a donc $\forall t \in I, \forall x \in [a, b]$, $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$ et en multipliant par $e^{-t} > 0$ on a : $0 \leq f(x, t) \leq e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$

Posons $\forall t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1}) = f(a, t) + f(b, t)$, alors φ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I par le a) comme somme de deux fonctions intégrables.

On a donc : $\begin{cases} \forall x \in [a, b], t \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } [a, b] \\ \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \forall (x, t) \in [a, b] \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ est intégrable sur } I \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème de continuité sous le signe somme et on a Γ qui est continue sur $[a, b]$

Comme $I = \bigcup_{[a,b] \subset I} [a, b]$ (I est la réunion de ses segments), alors $\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } I}$

c) On remarque que f est C^∞ sur I^2 et que On a $\forall (x, t) \in I^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t}$

Soit $[a, b] \subset I$. Alors, en réutilisant le résultat du a) :

$\forall (x, t) \in [a, b] \times I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(t)|(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

Posons $\forall t \in I$, $\Psi(t) = |\ln(t)| (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

- Au voisinage de $+\infty$: $\Psi(t) = o(\frac{1}{t^2})$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors, par négligeabilité, Ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$

- Au voisinage de 0 : $\Psi(t) \sim |\ln(t)| t^{a-1} = \frac{\ln(t)}{t^{1-a}}$

On a $a > 0$ et donc $1 - a < 1$. On peut donc choisir $\alpha \in]1 - a, 1[$ et on a : $\frac{\ln(t)}{t^\alpha} = \ln(t)t^{\alpha-(1-a)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ puisque $\alpha - (1 - a) > 0$

Au voisinage de 0 on a donc : $\Psi(t) = o(\frac{1}{t^\alpha})$ et comme $\alpha < 1$ donne $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable sur $]0, 1]$ alors, par négligeabilité, Ψ est intégrable sur $]0, 1]$

Ψ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ donc Ψ est intégrable sur $]0, +\infty[= I$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [a, b], t \mapsto f(x, t) \text{ est continue par morceaux et intégrable sur } I \\ \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ \forall x \in [a, b], t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \text{il existe une application } \Psi \text{ continue par morceaux et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \Psi(t) \end{array} \right.$$

on peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme de Leibniz et on a :

Γ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $\Gamma'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Comme ce résultat est valable pour segment inclu dans I , on a :

Γ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $\Gamma'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$

d) On sait que f est C^∞ sur I^2 et on remarque que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall (x, t) \in I^2$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t}$

Soit $[a, b] \subset I$. Alors, en réutilisant le résultat du a) :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall (x, t) \in [a, b] \times I$, $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq |\ln(t)|^k (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

Posons $\forall t \in I$, $\Psi_k(t) = |\ln(t)|^k (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$

On montre comme au c) que Ψ_k est continue par morceaux et intégrable sur I .

Par application de la règle de comparaison pour les fonctions positives on a : $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur I .

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^k \text{ sur } A \\ \bullet \forall x \in [a, b] \forall i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \text{ est continue par morceaux et } \mathbf{int\acute{e}grable} \text{ sur } I \\ \bullet \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ est } \mathbf{continue par morceaux} \text{ sur } I \\ \bullet \text{il existe une fonction } \Psi_k \mathbf{int\acute{e}grable} \text{ sur } I \text{ telle que :} \\ \forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \Psi_k(t) \mathbf{(Hypoth\grave{e}se de domination)} \end{array} \right.$

On peut application la généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme et on a donc que la fonction Γ est de classe C^k sur $[a, b]$ et vérifie $\forall x \in [a, b]$, $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $\Gamma^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$

Comme ce résultat est valable pour tout $[a, b] \subset I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a donc :

Γ est C^∞ sur $I =]0, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$