Chapitre 20 : Variables aléatoires partie 2 : espérance, variance, fonction génératrice, inégalités probabilistes

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe

1.1 Définition pour une variable à valeurs dans $[0;+\infty]$

Définition. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X est une variable aléatoire discrète de Ω dans $[0;+\infty]$. Alors on pose : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)$*

Si $\mathbb{E}(X) < +\infty$ on dit que X est **d'espérance finie**.

Remarques. *Par convention $x\mathbb{P}(X=x) = 0$ si [$x = +\infty$ et $\mathbb{P}(X=+\infty) = 0$]*
Si la famille $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable on a : $\mathbb{E}(X) \in [0;+\infty[$.
Si $X(\Omega)$ est fini et si $\mathbb{P}(X=+\infty) = 0$ alors $\mathbb{E}(X)$ est finie.

1.2 Généralisation

1.2.1 Définition

Définition. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X est une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathbb{C}$.*
Si $|X|$ est d'espérance finie on dit que X est d'espérance finie et on pose : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)$

$\mathbb{E}(X)$ est appelée **espérance de X**

Remarques. *C'est la somme d'une famille sommable.*
L'espérance de X est la valeur moyenne des valeurs prises par X pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.
C'est la valeur moyenne attendu lors de l'expérience.
Pour un jeu **l'espérance est le gain moyen**.
L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi.

1.2.2 Cas $X(\Omega)$ est fini

Si $X(\Omega)$ est fini dans $\mathbb{C}$, X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$

1.2.3 Cas $X(\Omega)$ est dénombrable

Si $X(\Omega)$ est dénombrable dans $\mathbb{C}$, on note $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors : X est dite d'espérance finie
si et seulement si la série $\sum x_n\mathbb{P}(X=x_n)$ est absolument convergente
On a alors : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X=x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\mathbb{P}(X=x_n)$
On admet que $\mathbb{E}(X)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération des x_n.

1.3 Exemples

1.3.1 Exemple 0 : loi certaine

1.3.2 Exemple 1 : loi liée à un événement

1.3.3 Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1;n \rrbracket)$

1.3.4 Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

1.3.5 Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

1.3.6 Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

1.3.7 Exemple 6 : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

1.4 Propriétés

1.4.1 Théorème du transfert

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et f une fonction à valeurs complexes définies sur $X(\Omega)$.*
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas on a : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)}^{+\infty} f(x)\mathbb{P}(X=x)$

Remarques. *Si $X(\Omega)$ est fini alors $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.*
Si $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dénombrable alors $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X=x_n)$ est absolument convergente.

preuve :

1.4.2 Linéarité, croissance, positivité

Théorème . *i) Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs positives admettant une espérance alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$*

ii) Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs positives admettant une espérance, si $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$ alors : $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$

iii) Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs positives admettant une espérance et si $X \leq Y$ (autrement dit : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$) alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

preuve :

1.4.3 Théorème

Théorème . *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour X et $\mathbb{R}^+$ pour Y, alors :*
Si $|X| \leq Y$ et si $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ alors X est d'espérance finie.

preuve :

1.5 Autres théorèmes

1.5.1 Nullité

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*
Alors $\begin{cases} X \geq 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(X=0) = 1$

preuve :

1.5.2 Cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$*
Alors $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)}$

preuve :

2 Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète réelle

2.1 Lemme préliminaire

Lemme. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeur réelles.*
Alors X^2 est d'espérance finie $\Rightarrow$ X est d'espérance finie.

preuve :

2.2 Variance

Définition. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeur réelles.*
Si X^2 est d'espérance finie alors on pose : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.
*$\mathbb{V}(X)$ est appelée **variance de** X*

Remarque. *On peut interpréter $\mathbb{V}(X)$ comme la moyenne des carrés des écarts de X avec sa moyenne. Autrement dit on mesure la dispersion de X autour de sa moyenne.*

2.3 Propriétés

Propriétés. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeur réelles telle que X^2 ait une espérance finie.*
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\begin{cases} \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \\ \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \end{cases}$

Remarque. *En particulier $V(ax) = a^2 V(X)$ et $V(X + b) = V(X)$.*

preuve :

2.4 Ecart type

Définition. *Soit X une variable aléatoire telle que X^2 ait une espérance finie. Alors on pose $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$*
*$\sigma(X)$ est appelé **écart type de X**.*

Remarque. *$\sigma(X)$ s'interprète de la même manière que $\mathbb{V}(X)$, la racine permettant d'avoir la même homogénéité que X.*

2.5 Cas particulier

Définitions. *Soit X une variable aléatoire.*
Alors si $\mathbb{E}(X) = 0$ on dit que X est **centrée**, *si de plus $\sigma(X) = 1$ on dit que X est* **centrée réduite**.

Lemme. *La variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.*
La variable aléatoire $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

preuve :

2.6 Exemples

2.6.1 Exemple 0 : loi certaine

2.6.2 Exemple 1 : loi liée à un événement

2.6.3 Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!]$

2.6.4 Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

2.6.5 Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

2.6.6 Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

2.6.7 Exemple 6 : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

3 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

3.1 Définition

Définition. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

Alors on appelle **fonction génératrice de X** *la série entière d'une variable réelle :* $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$

3.2 Premières propriétés

Propriétés. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit G_X sa fonction génératrice et R_X son rayon de convergence. Alors :*

- $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$
- $R_X \geq 1$
- *G_X converge normalement sur $[-1;1]$*
- *G_X est continue sur $[-1;1]$ et C^∞ sur $]-R_X, R_X[$*

preuve :

3.3 Exemples

3.3.1 Exemple 0 : loi certaine

3.3.2 Exemple 1 : loi liée à un événement

3.3.3 Exemple 2 : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1;n]\!]$

3.3.4 Exemple 3 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

3.3.5 Exemple 4 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

3.3.6 Exemple 5 : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

3.3.7 Exemple 6 : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

3.4 Fonction génératrice et loi

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction générarice.*

Alors G_X est C^∞ sur $]-R_X;R_X[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

preuve :

Remarque. *On peut donc dire que :*
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X

3.5 Fonction génératrice et espérance

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.*
Alors : X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 Dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$

preuve :

3.6 Fonction génératrice et variance

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.*
Alors : X^2 est d'espérance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1
Dans ce cas $G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

preuve :

4 Inégalités probabilistes

4.1 Inégalité de Markov

Théorème . *Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive admettant une espérance.*
Alors : $\forall a > 0 \ , \ \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

preuve :

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème . *Soit X une variable aléatoire d'espérance finie et admettant une variance. Alors :*

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$$

Remarques. *Comme $|X - \mathbb{E}(X)| < \epsilon$ est l'événement contraire de $|X - E(X)| \geq \epsilon$ alors :*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}$$

Cette inégalité tend à montrer que X prend des valeurs proche de $\mathbb{E}(X)$ avec une forte probabilité (dotant plus que $\mathbb{V}(X)$ est petit).
Si ϵ est proche de 0, l'inégalité n'a aucun intérêt car $\frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2} > 1$.
On verra une application de cette inégalité avec la loi faible des grands nombres dans le prochain chapitre.

preuve :

Sommaire