Feuille d'exercices n°56 : Chapitre 19,20,21

Exercice 442. *Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0;1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.*
a) Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
Après ses n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-k$ correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X + Y$, le nombre total de correspondant obtenus.
b) Déterminer la loi de Y sachant $(X = k)$, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.
c) En déduire la loi conjointe de (X, Y).
d) Montrer que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

Exercice 443. $(\star)$ *(Conditionnement d'une loi binomiale par une loi géométrique)*
Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $p \in]0,1[$. On se donne une variable aléatoire $N : \Omega \to \mathbb{N}$ suivant la loi géométrique de paramètre p.
On définit maintenant une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ de la manière suivante :
- on fixe $\omega \in \Omega$;
- on pose $n = N(\omega)$;
- on lance n fois une pièce de monnaie équilibrée ;
- on note $X(\omega)$ le nombre de pile obtenus.
a) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $(N = n_0)$.
b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
(i) Pour x réel et sous réserve d'existence on pose $f(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$
Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
Calculer $f(x)$ pour x dans l'intervalle ouvert de convergence.
(ii) Montrer que $\forall k \geq 1$, $P(X = k) = \frac{p}{1-p} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\frac{1-p}{2})^n$
c) Déterminer la loi de X .

Exercice 444. *Une urne contient n jetons ($n \geq 2$). On tire une poignée de jetons (c'est-à-dire une partie de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés, et S la somme des numéros des jetons tirés. Enfin, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le i-ième jeton est tiré et 0 sinon. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.*
1) Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.
2) Déterminer la loi de X_i. Montrer que les variables X_i sont 2 à 2 indépendantes.
3) Exprimer S en fonction des X_i. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 445. *On donne $p \in]0, \frac{1}{2}[$ et $q = 1 - p$*
X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \hookrightarrow G(p)$ et $Y \hookrightarrow G(q)$. On pose $Z = X + Y$
a) Montrer que : $\forall t \in [-1, 1]$, $\frac{t^2}{(1-pt)(1-qt)} = \frac{t^2}{q-p}(\frac{q}{1-qt} - \frac{p}{1-pt}) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{q^{k-1}-p^{k-1}}{q-p} t^k$
b) Trouver les fonctions génératrices de X , Y et Z.
c) En déduire la loi de Z.