Feuille d'exercices n°54 : Chapitre 19,20,21

Exercice 434. *Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On en tire deux et l'on note X le premier numéro tiré, Y le second.*
a) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales dans le cas d'un tirage avec remise.
b) Déterminer la loi conjointe et les lois marginales dans le cas d'un tirage sans remise.
c) Que peut-on en conclure ?

Exercice 435. *Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω telles que :*
$X(\Omega) = \{-1;1\}$, $Y(\Omega) = \{-1;0;1\}$ *et* $\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P(\{(X,Y) = (i,j)\}) = \frac{1}{8}$ *sauf* $P(\{(X,Y) = (1,0)\}) = \frac{3}{8}$
Déterminer les lois de X et Y. Calculer la covariance de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 436. *Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soient A et B deux événements.*
Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si les variables aléatoires réelles 1_A et 1_B sont indépendantes.

Exercice 437. *Considérons un couple de variables aléatoires (X,Y) qui suit une loi uniforme sur $\{(0;1);(0;-1);(1;0);(-1;0)\}$.*
a) Calculer la covariance de (X,Y)
b) X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?

Exercice 438. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe donnée par*
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \quad P(X = i \cap Y = j) = \lambda ij$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer la valeur de λ
b) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Calculer leurs espérances.
c) Les variables X et Y sont-elles des variables aléatoires indépendantes ?
d) Donner la valeur de $cov(X,Y)$ et en déduire $E(XY)$.

Exercice 439. *On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n. On tire une boule, on note X son numéro et on remet la boule dans l'urne. Ensuite on retire toutes les boules dont le numéro est strictement plus grand que X. On tire alors une nouvelle boule dont le numéro est noté Y. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X,Y).*

Exercice 440. *Un exemple avec X et Y deux variables aléatoires à valeur dans N*
On suppose que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = i, Y = j) = \frac{\lambda}{i! 2^j}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer la valeur de λ.
b) Déterminer la loi de X et la loi de Y.
c) X et Y sont-elle indépendantes ?

Exercice 441. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ.*
Démontrer que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.