Feuille d'exercices n°54 : Chapitre 19,20,21

Exercice 429. *On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.*

Exercice 430. *Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p.*
a) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
b) Démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $P(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$
c) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 431. *Une compagnie aérienne pratique le surbooking : elle vend plus de billets que ses avions peuvent contenir de passagers. Par exemple elle vend 390 billets pour un avion de 380 places.*
On estime qu'un passager a une probabilité de 0,95 de se présenter à l'embarquement.
On cherche à calculer la probabilité qu'au moins un passager ne puisse pas embarquer.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de passagers présent à l'embarquement.
a) Déterminer la loi suivie par X et en déduire son espérance et sa variance.
b) Montrer que : $P(X \geq 381) \leq P(|X - E(X)| \geq 10,5)$
c) Donner une majoration de $P(X \geq 381)$ avec l'inégalité de Tchebychev.
d) A la calculatrice donner une valeur approchée de $P(X \geq 381)$. Comparer c) et d).

Exercice 432. *Lors d'une compétition de saut en hauteur un athlète tente de franchir des barres successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Il n'a droit qu'à un essai par barre. On suppose que les sauts sont indépendants et que la probabilité de la réussite du n-ième saut vaut $r_n = \frac{1}{n}$*
a) On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.
Déterminer la loi de X .
b) Déterminer la fonction génératrice de X.
c) Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et les calculer.

Exercice 433. *Pour fidéliser ses clients une entreprise décide de joindre à ses produits des cartes à collectionner de n type différent.*
Il y a une carte jointe à chaque produit. On considère que les cartes jointes à chaque produit suivent des lois uniformes (sur l'ensemble des n possibles) indépendantes.
On note N la variable aléatoire représentant le nombre de produits à acheter pour avoir les n cartes (youpi collec complète !).
L'objectif de l'exercice est de déterminer l'espérance de N.
Pour cela on introduit, pour $i \in [\![1; n]\!]$, N_i le nombre d'achat à effectuer pour avoir i cartes différentes.
1°) Déterminer N_1 et $E(N_1)$.
2°) Pour $i \in [\![1; n-1]\!]$, quelle est la loi de $N_{i+1} - N_i$? En déduire $E(N_{i+1} - N_i)$.
3°) Déterminer $E(N)$.
4°) Donner un équivalent, pour n au voisinage de $+\infty$, de $E(N)$. (On admettra que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim ln(n)$)