Feuille d'exercices n°53 : Chapitre 19,20,21

Exercice 420. *Soit N et n deux entiers naturels tels que : $0 < n < N$.*
Un joueur prélève n boules simultanément dans une urne contenant N boules numérotés de 1 à N.
On considère la variable aléatoire réelle X égale au plus grand numéro des n boules prélevées.
a) Déterminer la loi de X.
b) Montrer que : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \ / \ \ n \leq k \ \ k\binom{k-1}{n-1} = n\binom{k}{n}$ et calculer l'espérance de X.

Exercice 421. *Le facteur distribue 4 lettres au hasard (de manière équiprobable) à 4 destinataires différents recevant chacun une et une seule lettre.*
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de destinataire ayant reçu la bonne lettre.
Déterminer la loi de X et le nombre moyen de destinataires recevant la bonne lettre.

Exercice 422. *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise. On dit qu'il y a rencontre au i-ième tirage si la boule tirée porte le numéro i.*
Déterminer le nombre moyen de rencontre.

Exercice 423. *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :*
$\exists a > 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ P(X = n+1) = \frac{a}{n+1} P(X = n)$ *Reconnaître X.*

Exercice 424. *On suppose que dans un pays donné, tous les couples enfantent jusqu'à obtenir un garçon. Le but de cet exercice est de trouver la proportion ρ de garçons dans la population (en supposant que garçon et fille sont équiprobable à la naissance).*
1) Soit X le nombre d'enfants dans un couple. Donner la loi de la variable aléatoire X.
2) Calculer ρ en fonction de X, puis $E(\rho)$.

Exercice 425. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.*
Calculer $E(\frac{1}{X})$

Exercice 426. *Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y est* ***sans mémoire*** *si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $P(Y > n) > 0$ et $P_{(Y>n)}(Y > n+m) = P(Y > m)$.*
a) On suppose que Y suit une loi géométrique. Démontrer que Y est sans mémoire.
Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.
b) Réciproquement, on suppose que Y est sans mémoire. Démontrer que $P(Y > 0) = 1$ et qu'il existe $p \in]0;1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(Y > n) = (1-p)^n$
En déduire que Y suit une loi géométrique.

Exercice 427. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.*
Quelle est la probabilité que $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 428. *On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.*
a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de E(X).
c) Démontrer que la suite $\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N}(\frac{k}{N})^n$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$ que l'on déterminera.
2°) d) Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{E(X)}{N}$