# Feuille d'exercices n°52 : Chapitre 19,20,21

**Exercice 415.** *On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants, et on note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note $u_n$ la probabilité $P(X = n)$.*
*On notera $P_k$ l'événement obtenir pile au k-ième lancers et $F_k = \overline{P_k}$*
*a) Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer les valeurs de $u_2$, $u_3$ et $u_4$.*
*b) Montrer que l'on a $\forall n \geq 4 \quad u_n = \frac{2}{9}u_{n-2} + \frac{1}{3}u_{n-1}$*
*c) En déduire l'expression de $u_n$ pour tout $n \geq 2$*
*d) Calculer $E(X)$.*

**Exercice 416.** $(\star)$ *(Fonctions de répartitions)*
*Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. On pose $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = P(X \leq x)$*
*$F$ est appelée* **fonction de répartition de** $F$

$$\text{Montrer que : } \begin{cases} F \text{ est croissante} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 \\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ a < b\ ,\ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \end{cases}$$

**Exercice 417.** *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles telle $X^2$ et $Y^2$ admettent une espérance finie.*
*Montrer alors que : $XY$ est d'espérance finie et $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$*

**Exercice 418.** *On effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir face est de $p \in ]0;1[$.*
*On note $X$ la variable aléatoire correspondant à la longueur de la première série de lancers identiques et $Y$ la variable aléatoire correspondant à la longueur de la deuxième série de lancers identiques.*
*Par exemple pour la suite de lancers $FFPPPFPFPPPFFPP...$ on a $X = 2$ et $Y = 3$, ou encore pour la suite de lancers $PFFPPPFPFPPPFFPP...$ on a $X = 1$ et $Y = 2$.*
*a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.*
*b) Calculer $E(X)$.*
*c) Déterminer la loi de probabilité de $Y$.*
*d) Calculer $E(Y)$.*
*e) Pour quelles valeurs de $p$ a-t-on : $E(X) = E(Y)$ ?*

**Exercice 419.** *Soit $X$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.*

*On suppose qu'il existe $p \in ]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^**, $P(X = n) = pP(X \geq n)$*
*Déterminer la loi de $X$.*