Feuille d'exercices n°49 : Chapitre 18

Exercice 397. *On pose* $I =]1, +\infty[$ *et* $\forall x > 1$, $f(x) = \int\limits_x^{2x} \frac{1}{ln(t)} dt$

a) Montrer que f *est bien définie sur* I*, de classe* C^∞ *et calculer la dérivée de* f *sur* I.
b) A l'aide d'un encadrement, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{ln(x)}$
c) Montrer que $\forall x > 1$, $f(x) = \int\limits_1^2 \frac{x du}{ln(x)+ln(u)}$ *et en déduire la limite* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
d) Dresser le tableau de variation de f
e) Ecrire un programmme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(2)$.
f) Tracer la représentation graphique de f *avec Python.*

Exercice 398. *On pose* $I = [0; +\infty[$ *et* $\forall x \in I \quad h(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ *et* $g(x) = \int\limits_0^1 \frac{exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2} dt$

A) Montrer que $\lambda = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *est convergente.*
B) a) Montrer que h *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$
B) b) Dresser le tableau de variation de h
C) a) Montrer que g *est de classe* C^1 *sur* I *et calculer* $g'(x)$.
C) b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
D) On pose $\forall x \in I \quad \varphi(x) = g(x) + h(x)^2$
D) a) Montrer que φ *est de classe* C^1 *sur* I *et calculer* $\varphi'(x)$
D) b) Etudier φ *aux bornes de* I *et en déduire* λ

Exercice 399. *Montrer que* $\forall x > -1 \quad \int_0^1 \frac{ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{ln(2)}{2} arctan(x) + \frac{\pi}{8} ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{ln(1+t)}{1+t^2} dt$
En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{ln(1+t)}{1+t^2} dt$

Exercice 400. *On pose* $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt$.
a) Montrer que f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *et exprimer* f' *sous forme d'intégrale.*
c) Calculer $f'(x)$ *pour* $x > 0$.
d) Déterminer $f(x)$ *pour tout* x.
e) Tracer la représentation graphique de f*, en particulier au point d'abscisse* 0.

Exercice 401. *On pose* $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{Arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$

a) Calculer $F(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *après avoir montrer que* F *était de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$
b) En déduire la valeur de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{Arctan(t)}{t(1+t^2)} dt$
c) Tracer la représentation graphique de F. F *est-telle de classe* C^2 ?

Exercice 402. *On pose* $\forall x > -1$: $f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln(1 + x sin^2(t)) dt$

a) Montrer que f *est définie sur* $]-1; +\infty[$
b) Montrer que f *est* C^∞ *sur* $]-1; +\infty[$
c) Calculer $f'(x)$ *puis* $f(x)$ *sur* $]-1; +\infty[$