Feuille d'exercices n°48 : Chapitre 18

Exercice 388. *On pose* $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [0;+\infty[\;\; f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-t/n}$

Calculer $\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$

Exercice 389. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{dt}{1-nln(t)}$

Exercice 390. *a) Montrer que :* $\forall u > -1 \;,\; ln(1+u) \leq u$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$

Exercice 391. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{nln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} dx$

Exercice 392. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N} \;,\; I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)} dx$

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

c) A l'aide d'un encadrement montrer que $I_n \sim \frac{\pi^2}{2\sqrt{n}}$

Exercice 393. *On pose :* $\forall n \in \mathbb{N} \;,\; A_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^n} dx$

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie et déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;,\; nA_{n+1} + A_n = 1$ *et en déduire un équivalent de* A_n.

On considère la série entière $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n z^n$

c) Déterminer le rayon de convergence R *de* $S(z)$.

d) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$ *:* $S(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x+1)e^{-x}}{x+1-z} dx$

Exercice 394. $(\star)$

Dans cette exercice on admet que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *On pose* $\forall t > 0 \;,\; f(t) = \frac{1}{t} ln(\left|\frac{1-t}{1+t}\right|)$

Montrer que : $\int\limits_0^1 f(t)dt = \int\limits_1^{+\infty} f(t)dt$ *et calculer cette valeur commune.*

Indication : on pourra développer f *en série entière.*

Exercice 395. $(\star)$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exercice 396. *Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} dt = \frac{\pi}{4}$