Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°11

Exercice 1 : e3a 2024 PSI, exercice 3

1.) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{ij} = m_{ji}$ donc M est symétrique réelle et donc, d'après le théorème spectral :

$\boxed{M \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{R})}$

2.1) $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X^T \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ donc les formats sont compatibles.
On a : $\boxed{U_X \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et son terme général ((i,j)-ème terme) vaut } x_i x_j}$

U_X est symétrique réelle donc par le théorème spectral : $\boxed{U_X \text{ est diagonalisable.}}$

2.2) On a directement $Im(U_X) = Vect(X)$ et comme X est non nul (sinon X et Y ne serait pas linéairement indépendant), alors : $\boxed{rg(U_X) = 1 \text{ et } Im(U_X) = Vect(X)}$

2.3) Soit $Z \in ker(U_X)$ et $Y = Im(U_X)$
Comme par 2.2) : $Im(U_X) = Vect(X)$ on a : $\exists a \in \mathbb{R}$, $Y = aX$

$Z \in ker(U_X)$
$\Rightarrow U_X Z = 0$
$\Rightarrow X \underbrace{X^T Z}_{\in\mathbb{R}} = 0$
$\Rightarrow (X^T Z) \underbrace{X}_{\neq 0_{\mathbb{R}^n}} = 0 \Rightarrow X^T Z = 0 \Rightarrow (X|Z) = 0 \Rightarrow (aX|Z) = 0 \Rightarrow (Y|Z) = 0$

Donc $\forall Z \in ker(U_X)$, $\forall Y = Im(U_X)$, $(Y|Z) = 0$ et donc $\boxed{ker(U_X) \text{ et } Im(U_X) \text{ sont orthogonaux.}}$

2.4) D'après 2.3) : $Ker(U_X) + Im(U_X) = Ker(U_X) \oplus Im(U_X)$
On a donc $dim(Ker(U_X) + Im(U_X)) = dim(Ker(U_X) \oplus Im(U_X)) = dim(Ker(U_X)) + dim(Im(U_X)) = dim(\mathbb{R}^n)$ par le théorème du rang.

On en déduit $\mathbb{R}^n = Ker(U_X) \oplus Im(U_X)$ et donc
$\boxed{Ker(U_X) \text{ et } Im(U_X) \text{ sont deux espaces vectoriels supplémentaires dans } \mathbb{R}^n.}$

2.5) $(U_X)^2 = (XX^T)(XX^T) = X \underbrace{(X^T X)}_{\in\mathbb{R}} X^T = (X^T X) X X^T = (X^T X) U_X$

On remarque que $X^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = tr(U_X)$

On a donc $U_X^2 = tr(U_X) U_X$.
On remarque que : $tr(U_X) = X^T X = ||X||^2$

$\boxed{\text{Un polynôme annulateur de degré 2 de } U_X \text{ est donc } X^2 - ||X||^2 X}$

2.6) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1}, X)$ une base adaptée à $\mathbb{R}^n = Ker(U_X) \oplus Im(U_X)$
Alors les e_i sont dans $ker(u_X)$ et donc $u(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$
$u_X(X) = (XX^T)X = X \underbrace{(X^TX)}_{\in\mathbb{R}} = (X^TX)X = ||X||^2 X$

$$\boxed{\text{La matrice relativement à une base adaptée à la décomposition de 2.4) est donc } \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & ||X||^2 \end{pmatrix}}$$

3.) On remarque que : $M = I_n + \alpha XX^T + \beta YY^T$, donc, si $\beta = 0$ alors : $M = I_n + +\alpha XX^T$
Dans la base du 2.6) I_n est la même et donc $\boxed{M \text{ est semblable à } diag(1, \dots, 1, 1 + ||X||^2)}$

4.1.1) MX
$= (I_n + \alpha XX^T + \beta YY^T)X$
$= X + \alpha X \underbrace{X^TX}_{||X||^2\in\mathbb{R}} + \beta Y \underbrace{Y^TX}_{(X|Y)\in\mathbb{R}} = (1 + \alpha ||X||^2)X + \beta(X, Y)Y$

On a donc : $\boxed{MX = (1 + \alpha ||X||^2)X + \beta(X, Y)Y}$

4.1.2) Avec l'expression de 4.1.1) on a : $MX \in F$.
De même, par symétrie : $MY = (1 + \beta ||Y||^2)Y + \alpha(X, Y)X$ est dans F

Comme $F = Vect(X, Y)$ alors, par linéarité de f : $\boxed{F \text{ est stable par } f}$

4.2) Soit $Z \in F^\perp$ alors $(Z, X) = (Z, Y) = 0$
Mais Comme $MZ = Z + \alpha(X, Z)X + \beta(Y, Z)Y$ alors $MZ = Z$ et donc $MZ \in F^\perp$

$\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f \text{ et } f|_{F^\perp} = Id_{F^\perp}}$

4.3.1) Avec 4.1.1) (et 4.1.2) : $\begin{cases} MX = (1 + \alpha ||X||^2)X + \beta(X, Y)Y \\ MY = (1 + \beta ||Y||^2)Y + \alpha(X, Y)X \end{cases}$
Comme (X, Y) est supposée être une base de F :

$\boxed{G \text{ est la matrice de l'endomorphisme induit sur } F \text{ par } f \text{ dans la base } (X, Y)}$

Remarque : (X, Y) est libre car X et Y sont linéairement indépendant, c'est donc une base de F.

4.3.2) Dans la base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de f s'écrit : $\boxed{\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}}$

4.3.3) M est symétrique réelle, donc M est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$,
donc f est diagonalisable,
donc la restriction de f à des sous espaces stables est diagonalisable dans $\mathbb{R}$,
donc $\boxed{G \text{ est diagonalisable dans } M_2(\mathbb{R}) \text{ et ses valeurs propres sont réelles.}}$

4.3.4.) Posons $G' = G - I_2 = \begin{pmatrix} \alpha\,||X||^2 & \alpha(X,Y) \\ \beta(X,Y) & \beta\,||Y||^2 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de G' vaut : $P_{G'}(X) = det(XI_2 - G') = X^2 - tr(G')X + det(G')$ donc :
$P_{G'}(X) = X^2 - (\alpha\,||X||^2 + \beta\,||Y||^2)X + \alpha\beta\,||X||^2\,||Y||^2 - \alpha\beta(X,Y)^2$
Son discriminant vaut :
$\Delta = (\alpha\,||X||^2 + \beta\,||Y||^2)^2 - 4[\alpha\beta\,||X||^2\,||Y||^2 - \alpha\beta(X,Y)^2]$
$\quad = (\alpha\,||X||^2 - \beta\,||Y||^2)^2 + 4\alpha\beta(X,Y)^2$

Comme on sait que G (et donc G') a des valeurs propres réelles, on a forcément $\Delta \geq 0$.

Les valeurs propres de G' sont donc
$\eta_1 = \frac{\alpha||X||^2+\beta||Y||^2+\sqrt{(\alpha||X||^2-\beta||Y||^2)^2+4\alpha\beta(X,Y)^2}}{2}$ et $\eta_2 = \frac{\alpha||X||^2+\beta||Y||^2+\sqrt{(\alpha||X||^2-\beta||Y||^2)^2+4\alpha\beta(X,Y)^2}}{2}$

Les valeurs propres de G sont donc
$\boxed{1+\eta_1 = 1 + \frac{\alpha||X||^2+\beta||Y||^2+\sqrt{(\alpha||X||^2-\beta||Y||^2)^2+4\alpha\beta(X,Y)^2}}{2} \text{ et } 1+\eta_2 = 1 + \frac{\alpha||X||^2+\beta||Y||^2+\sqrt{(\alpha||X||^2-\beta||Y||^2)^2+4\alpha\beta(X,Y)^2}}{2}}$

Remarque : je n'ai pas trouvé d'expression plus simple ...

4.4) Compte tenu de 4.3.2), les valeurs propres de M sont 1 et les valeurs propres de G $1+\eta_1$ et $1+\eta 82$ trouvées en 4.3.4).

$\boxed{sp(M) = \{1, 1+\eta_1, 1+\eta_2\}}$

Exercice 2 : ccINP 2024 PC, exercice 1

1.) Calculons le polynôme caractéristique de A
$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 12 \\ 1 & X-5 \end{vmatrix} = X^2 - 9X + 8 = (X-1)(X-8)$

Comme $\lambda \in sp(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$, alors, on en déduit que : $sp(A) = \{1, 8\}$

$A \in M_2(\mathbb{R})$ et A admet deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
Comme on connaît le sprectre de A, alors :

$\boxed{\exists P \in M_2(\mathbb{R}), \text{ inversible, telle que : } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$

2.) B racine cubique de A
$\Leftrightarrow B^3 = A$
$\Leftrightarrow B^3 = PDP^{-1}$
$\Leftrightarrow P^{-1}B^3P = D$
$\Leftrightarrow (P^{-1}BP)^3 = D$
$\Leftrightarrow P^{-1}BP$ est une racine cubique de D

Bilan : $\boxed{B \text{ racine cubique de } A \text{ si et seulement si } \Delta = P^{-1}BP \text{ est une racine cubique de } D}$

3.) • Δ racine cubique de D donne $\Delta^3 = D$. Donc $\begin{cases} \Delta D = \Delta\Delta^3 = \Delta^4 \\ D\Delta = \Delta^3\Delta = \Delta^4 \end{cases}$

et donc $\boxed{\Delta \text{ et } D \text{ commutent.}}$

• Si on écrit $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ alors :

$D\Delta = \Delta D \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta$ est diagonale.

On a donc $\boxed{\Delta \text{ est diagonale.}}$

4.) • Avec les notations du 3.) :
$\Delta^3 = D \Leftrightarrow a^3 = 1$ et $d^3 = 8 \Leftrightarrow a = 1$ et $d = 2$ (dans $\mathbb{R}$)

$$\boxed{D \text{ admet une unique racine cubique : } \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

• Avec le 2.) : $\boxed{A \text{ admet une unique racine cubique : } P\Delta_1 P^{-1}}$

5.) D'après le cours : $\boxed{u \text{ est la rotation vectorielle d'angle } \theta.}$

6.) En pensant aux rotations, une racine cubique de u est la rotation d'angle $\frac{\theta}{3}$, donc :

$$\boxed{\text{une racine cubique de } M \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{3}) & -sin(\frac{\theta}{3}) \\ sin(\frac{\theta}{3}) & cos(\frac{\theta}{3}) \end{pmatrix}}$$

7.) Si N est une matrice orthogonale de déterminant -1 alors N est une matrice de réflexion, donc de symétrie, donc $N^2 = I_2$ et donc $N^3 = N$ $\boxed{N \text{ est alors une racine cubique de } N.}$

8.) Comme $t \mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors λ admet une racine cubique dans $\mathbb{R}$, que l'on note $\sqrt[3]{\lambda}$. On a $(\sqrt[3]{\lambda})^3 = \lambda$

Alors, directement : $\boxed{\text{une racine cubique de } H_p(\lambda) \text{ est } H_p(\sqrt[3]{\lambda})}$

9.) A est semblable par blocs à : $D = diag(H_{p_1}(\lambda_1), \dots, H_{p_d}(\lambda_d))$ donc une racine cubique est $\Delta = diag(H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}), \dots, H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_d}))$
On a donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = PDP^{-1}$
Une racine cubique de A est alors : $P\Delta P^{-1}$

10.) Puisque A est inversible alors 0 n'est pas valeur propre de A et donc :

$\boxed{\text{les nombres } \lambda_1, \dots, \lambda_d \text{ sont non nuls.}}$

11.) On cherche les solutions de $z^3 = \lambda$ sous la forme $z = re^{i\varphi}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ puisque $z = 0$ n'est pas solution (parce que $\lambda \in \mathbb{C}^*$)
Alors : $z^3 = \lambda$
$\Leftrightarrow r^3 exp(3i\varphi) = \rho exp(i\theta)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = \rho \\ 3\varphi = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} \\ \varphi = \frac{\theta+2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\rho} exp(\frac{i\theta+2ki\pi}{3})$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Par 2π périodicité de $\theta \mapsto exp(i\theta)$, on a que :

$$\boxed{z^3 = \lambda \text{ admet exactement 3 solutions : } \sqrt[3]{\rho} exp(\tfrac{i\theta}{3}),\ \sqrt[3]{\rho} exp(\tfrac{i\theta+2\pi}{3}) \text{ et } \sqrt[3]{\rho} exp(\tfrac{i\theta-2\pi}{3})}$$

12.) Avec la question 11.) Q s'écrit $Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(\prod_{i=1}^{3} (X - \mu_{k,i}) \right)$ ou les $\mu_{k,1}$, $\mu_{k,2}$ et $\mu_{k,3}$ sont les trois racines cubiques distinctes de λ_k
Si $k \neq k'$ alors $\mu_{k,i} \neq \mu_{k',i}$ car sinon en élevant au cube on aurait $\lambda_k = \lambda_{k'}$

Finalement : $\boxed{Q \text{ est scindé simple sur } \mathbb{C}}$

13.) A est diagonalisable, donc d'après le cours :
$R(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A.
Donc $R(A) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Comme $B^3 = A$ alors $R(B^3) = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ et donc Q est un polynôme annulateur de B.
B admet donc, avec 12.), un polynôme annulateur scindé dans $\mathbb{C}$, donc, d'après le cours :
$\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C})}$

Problème : Mines-Ponts 2024 PC, Chaîne de Markov en temps continu

1) • Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$. Alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $(AU)[i] = \sum_{j=1}^{n} A[i,j]U[j] = \sum_{j=1}^{n} A[i,j]$

On en déduit : $\boxed{A \text{ vérifie } (M_2) \Leftrightarrow\Rightarrow AU = U}$

• Soit A et B deux noyaux de Markov. On pose $C = AB$.
Alors $C[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A[i,k]}_{\geq 0}\underbrace{B[k,kj]}_{\geq 0} \geq 0$
Et de plus, $CU = ABU = A(BU) = AU = U$
Avec ce qui précède, C vérifie (M_1) et (M_2) et donc $C = AB$ est un noyau de Markov.

Bilan : $\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont 2 noyaux de Markov, alors } AB \text{ est un noyau de Markov.}}$

2) Soit K un noyau de Markov.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que K^n est un noyau de Markov.

Initialisation : Pour $n = 0$, $K^n = K^0 = I_N$ qui est bien à coefficients positifs. De plus $I_N U = U$ donc K^0 est un noyau de Markov.

Hérédité : Supposons que K^n est un noyau de Markov.
Alors, avec le 1) : $KK^n = K^{n+1}$ est un noyau de Markov.

Bilan : $\boxed{\text{Si } K \text{ est un noyau de Markov, alors : } \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } K^n \text{ est un noyau de Markov.}}$

3) On a $0 \leq K^n[i,j] \leq 1$ donc $0 \leq \left|\frac{t^n K^n[i,j]}{n!}\right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$
Par la série exponentielle réelle que l'on reconnaît on a : $\sum \frac{|t|^n}{n!}$ convergente.
Donc, par comparaison, $\boxed{\sum \frac{t^n K^n[i,j]}{n!} \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

4) • Comme $t \in \mathbb{R}^+$ alors $0 \leq K^n[i,j] \leq 1$ donne $0 \leq \frac{t^n K^n[i,j]}{n!} \leq \frac{t^n}{n!}$
En sommant de $n = 0$ à $+\infty$ on a : $0 \leq H_t[i,j] \leq e^t$ et donc $0 \leq e^{-t}H_t[i,j] \leq 1$
H_t vérifie donc (M_1)

• Pour $i \in [\![1;N]\!]$, $\sum_{j=1}^{N} H_t[i,j] = \sum_{j=1}^{N} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!}$

Comme la somme sur j est finie et que les séries en n sont convergentes alors :
$$\sum_{j=1}^{N} H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{t^n K^n[i,j]}{n!} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} K^n[i,j]}_{=1}$$

En utilisant alors que K^n est un noyau de Markov on a :
$$\sum_{j=1}^{N} H_t[i,j] = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^{-t}e^t = 1$$

H_t vérifie donc (M_2)

• $\boxed{\text{Pour } t \in \mathbb{R}^+, H_t \text{ est un noyau de Markov.}}$

5) Par définition du produit matriciel : $(H_tH_s)[i,j] = \sum\limits_{k=1}^{N} H_t[i,k]H_s[k,j]$

Mais $H_t[i,k]H_s[k,j] = \left(e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,k]}{n!}\right)\left(e^{-s}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{s^nK^n[k,j]}{n!}\right) = e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,k]}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{s^nK^n[k,j]}{n!}\right)$

On a le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes donc :

$H_t[i,k]H_s[k,j]$

$= e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{t^pK^p[i,k]}{p!}\frac{s^{n-p}K^{n-p}[k,j]}{(n-p)!}\right)$

$= e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!}t^ps^{n-p}K^p[i,k]K^{n-p}[k,j]\right)$

$= e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(tK)^p[i,k](sK)^{n-p}[k,j]\right)$

Donc $(H_tH_s)[i,j] = \sum\limits_{k=1}^{N}\left[e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(tK)^p[i,k](sK)^{n-p}[k,j]\right)\right]$

Comme on a des sommes finies et une série absolument convergente :

Donc $(H_tH_s)[i,j] = e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}(tK)^p[i,k](sK)^{n-p}[k,j]}_{([(tK)^p\times(sK)^{n-p}][i,j]}\right)$

Alors $(H_tH_s)[i,j]$

$= e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}[(tK)^p\times(sK)^{n-p}]\right)[i,j]$

$= e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left[\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}[(tK)^p\times(sK)^{n-p}]\right]\right)[i,j]$

Par la formule du binôme (cas tK et sK commutent) :

$(H_tH_s)[i,j] = e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(tK+sK)^n\right)[i,j] = e^{-(t+s)}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(t+s)^nK^n\right)[i,j]$

On a donc $(H_tH_s)[i,j] = H_{t+s}[i,j]$

Ceci, pour tout i et tout j, donc $H_tH_s = H_{t+s}$

Bilan : $\boxed{\forall(t,s)\in(\mathbb{R}^+)^2\ ,\ H_tH_s = H_{t+s}}$

---

6) • Pour tout $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ on a $K[i,j] = p_{ij}\in[0,1]$ car on a une probabilité. On a donc K qui vérifie (M_1).

• Pour $i\in[\![1;n[\![$.

$\sum\limits_{j=1}^{n}K[i,j] = \sum\limits_{j=1}^{n}P(Z_{k+1}=i|Z_k=j) = \sum\limits_{j=1}^{n}P_{(Z_k=j)}(Z_{k+1}=i)$

Mais on sait, d'après le cours que $P_{(Z_k=j)}$ est une probabilité, et on a aussi que $(Z_{k+1}=j)_{j_in[\![1;n]\!]}$ est un système complet d'événements.

On a donc $\sum\limits_{j=1}^{n}K[i,j] = 1$ et donc K vérifie (M_2).

• $\boxed{K \text{ est un noyau de Markov.}}$

7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall j \in [\![1;N]\!]$, $P(Z_n = j) = K^n[1,j]$

Initialisation : au rang $n = 0$ on veut montrer $P(Z_0 = j) = I_N[1,j]$
Mais $Z_0 = 1$ donc $\forall j \in [\![1;N]\!]$, $P(Z_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \neq 1 \end{cases} = I_N[1,j]$
On a donc amorcer la récurrence.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall j \in [\![1;N]\!]$, $P(Z_n = j) = K^n[1,j]$

Alors, par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(Z_n = i)_{i\in[\![1;N]\!]}$ on a :
$\forall j \in [\![1;N]\!]$, $P(Z_{n+1} = j) = \sum\limits_{i=1}^{N} \underbrace{P(z_{n+1} = j|Z_n = i)}_{K[i,j]}\underbrace{P(Z_n = i)}_{K^n[1,i]}$
En utilisant, la relation de récurrence : $P(Z_{n+1} = j) = \sum\limits_{i=1}^{N} K^n[1,i]K[i,j]$
Puis par définition du produit matriciel de K par K^n : $P(Z_{n+1} = j) = K^{n+1}[1,j]$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ ,\forall j \in [\![1;N]\!]\ ,\ P(Z_n = j) = K^n[1,j]}$

8) Comme Y_t suit une loi de Poisson alors $(Y = p)_{p\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements on a alors :
$P(A_{t,j}) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} P\big(A_{t,j} \cap (Y = p)\big)$
Mais $\Big(A_{t,j} \cap (Y = p)\Big) = (Z_p = j)$ donc : $P(A_{t,j}) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} P\big((Z_p = j) \cap (Y = p)\big)$
Comme les événements $(Z_p = j)$ et $(Y = p)$ sont indépendants alors :
$P(A_{t,j}) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} P(Z_p = j)P(Y = p)$
En utilisant 7) et la définition de Y :
$P(A_{t,j}) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} K^p[1,j]e^{-t}\frac{t^p}{p!} = H_t[1,j]$ par définition de H_t

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+\ ,\ \forall j \in [\![1;N]\!]\ ,\ P(A_{t,j}) = H_t[1,j]}$

---

9) On remarque que u est un endomorphisme autoadjoint positif.
D'après le théorème spectral et le cours :
$\boxed{u \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée pour } <,> \text{ et les valeurs propres de } u \text{ sont positives.}}$

10) Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E diagonalisant u de telle sorte que :
$M_B(u) = diag(0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$
Ce choix est possible quitte à échanger l'ordre des vecteurs propres.

Pour $x \in E$ on écrit alors : $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ dans la base B.

On remarque alors que $p(x) = x_1 e_1$ et donc que $x - p(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} x_k e_k$

On a alors :

$q_u(x-p(x))$
$=< u(x-p(x)), x-p(x) >$
$=< u(\sum_{k=2}^{n} x_k e_k), \sum_{k=2}^{n} x_k e_k >$
$=< \sum_{k=2}^{n} x_k \lambda_k e_k, \sum_{k=2}^{n} x_k e_k >$
$= \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k^2$ on a utilisé que B est une base orthonormée
$\geq \sum_{k=2}^{n} \lambda_2 x_k^2$ (définition de λ_2)
$\geq \lambda_2 \sum_{k=2}^{n} x_k^2$
$\geq \lambda_2 \, ||x-p(x)||^2$

On a donc : $\boxed{\forall x \in E \ , \ q_u(x-p(x)) \geq \lambda_2 \, ||x-p(x)||^2}$

---

11) Soit $j \in [\![1;N]\!]$. Alors : $(\pi K)[j] = \sum_{k=1}^{n} \pi[k]K[k,j]$

On utilise la propriété de π-réversibilité et on a : $(\pi K)[j] = \sum_{k=1}^{n} K[j,k]\pi[j]$

Mais, comme K est de Markov et vérifie (M_2) alors : $\sum_{k=1}^{n} K[j,k] = 1$

On a donc : $\forall j \in [\![1;N]\!] \ , \ (\pi K)[j] = \pi[j]$

On a donc : $\boxed{\pi K = \pi}$

12) Soit : $(X,Y,Z) \in M_{N,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

i) $< X+\lambda Y, Z >= \sum_{i=1}^{N} (X[i]+\lambda Y[i])Z[i]\pi[i] = \sum_{i=1}^{N} X[i]Z[i]\pi[i] + \lambda \sum_{i=1}^{N} Y[i]Z[i]\pi[i] =< X,Y > +\lambda < Y,Z >$

ii) $< X,Y >= \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i] =< Y,X >$

iii) $< X,X >= \sum_{i=1}^{N} X[i]^2 \underbrace{\pi[i]}_{\geq 0} \geq 0$

iv) $< X,X >= 0$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \underbrace{X[i]^2\pi[i]}_{\geq 0} = 0$ on a une somme de terme positifs qui est nulle
$\Rightarrow \forall i \in [\![1;N]\!] \ , \ X[i]^2\pi[i] = 0$ mais $\pi[i] \neq 0$
$\Rightarrow \forall i \in [\![1;N]\!] \ , \ X[i] = 0$
$\Rightarrow X = 0_{M_{N,1}(\mathbb{R})}$

On a donc les quatre points qui permettent d'affirmer que : $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire sur } M_{N,1}(\mathbb{R})}$

13) • Comme 1 est valeur propre simple de K, alors $dim(ker(K-I_n)) = 1$
Comme K est un noyau de Markov, alors $KU = U$ donc $U \in ker(K-I_n)) = ker(I_n-K)$, et par la dimension : $ker(I_n-K) = Vect(U)$
On a donc $ker(u) = Vect(U)$

• I_n est autoadjoint, K est autoadjoint et l'ensemble des endomorphismes autoadjoint est un espace vectoriel donc $u = I_n - K$ est autoadjoint.

• Bilan : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme autoadjoint et } ker(u) = Vect(U)}$

14) • $q_u(X) =< u(X), X >=< (I_n - K)X, X >=< X - KX, X >$
Donc $q_u(X) = \sum\limits_{i=1}^{N}(X[i] - (KX)[i])X[i]\pi[i] = \sum\limits_{i=1}^{N}(X[i] - \sum\limits_{j=1}^{N} K[i,j]X[j])X[i]\pi[i]$
Mais $\sum\limits_{j=1}^{N} K[i,j] = 1$ donc : $q_u(X) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(K[i,j]X[i] - K[i,j]X[j])X[i]\pi[i]$
$\Rightarrow q_u(X) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(X[i] - X[j])X[i]K[i,j]\pi[i] \Leftrightarrow (1)$
On utilise la propriété de π-réversibilité et on a :
$q_u(X) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(X[i] - X[j])X[i]K[j,i]\pi[j]$
On échange les rôte de i et j (changement d'indice $'i = j'$, $'j = i'$) et on a :
$q_u(X) = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(X[j] - X[i])X[j]K[i,j]\pi[i] \Leftrightarrow (2)$

On additionne les deux expressions (1) et (2) et on a :
$$2q_u(X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big[(X[j] - X[i])X[j] + (X[i] - X[j])X[i]\Big]K[i,j]\pi[i]$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[j]^2 + X[i]^2 - 2X[i]X[j])K[i,j]\pi[i]$$

On a finalement : $\boxed{q_u(X) = \frac{1}{2}\big(\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(X[i] - X[j])^2K[i,j]\pi[i]\big)}$

• Soit $\lambda \in sp(u)$, alors $\exists X \in M_{N,1}(\mathbb{R})$, $u(X) = \lambda X$ et $X \neq 0$
Alors d'une part : $q_u(X) =< u(X), X >=< \lambda X, X >= \lambda\,||X||^2$
Et avec l'expression précédentes $q_u(X) \geq 0$ donc , comme $||X||^2 > 0$, alors $\lambda \geq 0$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } u \text{ sont donc positives.}}$

Remarque : u est autoadjoint positif.

15) • Les coefficients de H_t sont des fonctions de t qui sont C^∞, comme produit de la fonction C^∞ $(t \mapsto e^{-t})$ et de la fonction $(t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^nK^n[i,j]}{n!})$ qui est C^∞ en tant que série entière de rayon de convergence $+\infty$ (comparaison à la série exponentielle).

On en déduit que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonction dérivables.

• Par définition : $\forall j \in [\![1; N]\!]$, $\Psi_X(t)[j] = \sum\limits_{i=1}^{N} H_t[i,j]X[i] = \sum\limits_{i=1}^{N} \big(e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^nK^n[i,j]}{n!}\big)X[i]$

On peut dériver cette somme terme à terme, car on a une somme **finie** avec des séries entières de rayon de convergence $+\infty$ (donc on est sur l'intervalle ouvert de convergence).

$\Psi'_X(t)[j] = \sum_{i=1}^{N} \big(e^{-t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}K^n[i,j]}{(n-1)!} - e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{(n)!}\big)X[i]$

Changement d'indice dans la première somme puis réorganisation :

$$\Psi'_X(t)[j] = \sum_{i=1}^{N} \big(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^{n+1}[i,j]}{n!} - e^{-t} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,j]}{(n)!}}_{H_t[i,j]}\big)X[i]$$

$$= -\underbrace{\sum_{i=1}^{N} H_t[i,j]X[i]}_{(H_tX)[j]} + \sum_{i=1}^{N} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^{n+1}[i,j]}{n!} X[i]$$

On a : $K^{n+1}[i,j] = \sum_{k=1}^{N} K^n[i,k]K[k,j]$, donc :

$$\Psi'_X(t)[j] = -(H_tX)[j] + \sum_{i=1}^{N} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \sum_{k=1}^{N} K^n[i,k]K[k,j]}{n!} X[i]$$

La série est absolument convergente et les autres sommes sont finies, donc on peut intervertir :

$$\Psi'_X(t)[j] = -(H_tX)[j] + \sum_{k=1}^{N} K[k,j]\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n K^n[i,k]}{n!} X[i]}_{(H_tX)[k]}\Big)$$

$$\begin{aligned} &= -(H_tX)[j] + \sum_{k=1}^{N} K[k,j](H_tX)[k] \\ &= -(H_tX)[j] + (K(H_tX))[j] \\ &= (-(I_N - K)H_tX)[j] \end{aligned}$$

Ceci $\forall j \in [\![1;N]\!]$ donc :

$$\boxed{\Psi_X \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \Psi'_X(t) = -(I_N - K)H_tX}$$

16) On a : $\varphi_X(t) =< \Psi_X(t), \Psi_X(t) >$

L'application $<,>$ est bilinéaire et Ψ est dérivable, donc φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus : $\forall t \in \mathbb{R}$

$\varphi'_X(t) =< \Psi'_X(t), \Psi_X(t) > + < \Psi'_X(t), \Psi'_X(t) >= 2 < \Psi'_X(t), \Psi_X(t) >$

En utilisant la question 15) et la définition de Ψ :

$\varphi'_X(t) = 2 < -(I_N - K)H_tX, H_tX >= -2q_u(H_tX)$

On a donc : $\boxed{\varphi_X \text{ est dérivable et } \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi'_X(t) = -2q_u(H_tX)}$

17) On a $ker(u) = Vect(U)$ et on a $< U, U >= \sum_{i=1}^{n} U[i]U[i]\pi[i]$

Mais $U[i] = 1$ donc $< U, U >= \sum_{i=1}^{n} \pi[i] = 1$ car π est une probabilité.

On a donc U unitaire pour $||.||$

Alors $p(H_tX) =< H_tX, U > U$

Comme en Q13) on a admit que H_t était autoadjoint alors : $p(H_tX) =< X, H_tU > U$

Mais on aussi admis que H_t était un noyau de Markov donc $H_tU = U$ donc $p(H_tX) =< X, U > U = p(X)$

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+\ ,\ p(H_tX) = p(X)}$

18) • Avec Q16) : $\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_tY)$
Mais $H_tY = H_t(X - p(X)) = H_tX - H_tp(X)$ or, comme p est la projection sur $Vect(U)$, $p(X) \in Vect(U)$ et $H_tp(X) = p(X)$ puisque $H_tU = U$
On en déduit : $H_tY = H_tX - p(X)$
On a alors : $\varphi'_Y(t) = -2q_u(H_tX - p(X))$

On utilise alors Q10) pour avoir :
$q_u(H_tX - p(X)) \geq \lambda \left|\left|H_tX - p(X)\right|\right|^2 \Leftrightarrow -2q_u(H_tX - p(X)) \leq -2\lambda \left|\left|H_tX - p(X)\right|\right|^2$

En reportant ci-dessus : $\varphi'_Y(t) \leq -2\lambda \left|\left|H_tX - p(X)\right|\right|^2 = -2\lambda \left|\left|H_tY\right|\right|^2 = -2\lambda\varphi_Y(t)$

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ \varphi'_Y(t) \leq -2\lambda\varphi_Y(t)}$

• Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $A(t) = e^{-2\lambda t}\varphi_Y(t)$
Alors, A est dérivable (car φ_Y l'est et que $t \mapsto e^{-2\lambda t}$ l'est aussi) et :
$A'(t) = e^{-2\lambda t}\varphi'_Y(t) - 2\lambda e^{-2\lambda t}\varphi_Y(t) = e^{-2\lambda t}[\varphi'_Y(t) - 2\lambda\varphi_Y(t)] \leq 0$ d'après le début de cette question Q18).

On a donc A décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ A(t) \leq A(0)$

Mais $A(0) = \varphi_Y(0) = \left|\left|H_0Y\right|\right|^2 = \left|\left|I_NY\right|\right|^2 = \left|\left|Y\right|\right|^2 = \left|\left|X - p(X)\right|\right|^2$
donc $A(t) \leq A(0)$
$\Rightarrow e^{-2\lambda t}\varphi_Y(t) \leq \left|\left|X - p(X)\right|\right|^2$
$\Rightarrow \varphi_Y(t) \leq e^{2\lambda t} \left|\left|X - p(X)\right|\right|^2$ mais $\varphi_Y(t) = \left|\left|H_tX - p(X)\right|\right|^2$
$\Rightarrow \left|\left|H_tX - p(X)\right|\right|^2 \leq e^{2\lambda t} \left|\left|X - p(X)\right|\right|^2$

On a donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ \left|\left|H_tX - p(X)\right|\right|^2 \leq e^{2\lambda t} \left|\left|X - p(X)\right|\right|^2}$

19) On va appliquer Q18) avec $X = E_i$. Alors $p(E_i) =< E_i, U > U$
Mais $< E_i, U >= \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{E_i[k]}_{=0 \text{ si } k \neq i} U[k]\pi[k] = \underbrace{E_i[i]}_{=1}\underbrace{U_i[i]}_{=1}\pi[i] = \pi[i]$
donc $p(E_i) = \pi[i]U$
Alors $E_i - p(E_i) = E_i - \pi[i]U$ dont toute les coordonnées valent $-\pi[i]$ sauf la i-ème qui vaut $1 - \pi[i]$
Alors $\left|\left|E_i - p(E_i)\right|\right|^2$
$= \sum\limits_{k=1}^{N}(E_i - p(E_i))[k]^2\pi[k]$
$= \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N}(-\pi[i])^2\pi[k] + (1 - \pi[i])^2\pi[i]$
$= \pi[i]^2 \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \pi[k] + (1 - \pi[i])^2\pi[i]$
$= \pi[i]^2(1 - \pi[i]) + (1 - \pi[i])^2\pi[i]$
$= (1 - \pi[i])(\pi[i]^2 + (1 - \pi[i])\pi[i])$
$= (1 - \pi[i])\pi[i]$

Alors Q18) donne : $\left|\left|H_tE_i - \pi[i]U\right|\right|^2 \leq e^{2\lambda t}(1 - \pi[i])\pi[i] \leq e^{2\lambda t}\pi[i]$ car $0 \leq 1 - \pi[i] \leq 1$
En prenant la racine carrée, on obtient :

$\boxed{\forall i \in [\![1; N]\!] \ , \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \ \left|\left|H_tE_i - \pi[i]U\right|\right| \leq e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}}$

20) $\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j])$

$= \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]H_{t/2}[k,j] - \pi[j]\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k] - \sum_{k=1}^{N}\pi[k]H_{t/2}[k,j] + \sum_{k=1}^{N}\pi[k]\pi[j]$

Pour le premier terme on reconnaît $(H_{t/2}H_{t/2})[i,j] = H_t[i,j]$ d'après Q5).

Comme $H_{t/2}$ est un noyau de Markov alors : $\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k] = 1$

Par π réversibilité on a : $\pi[k]H_{t/2}[k,j] = H_{t/2}[j,k]\pi[j]$

Et pour le dernier terme $\sum_{k=1}^{N}\pi[k] = 1$

Donc $\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j])$

$= H_t[i,j] - \pi[j] - \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[j,k]\pi[j] + p[j]$

$= H_t[i,j] - \underbrace{\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[j,k]}_{=1}\pi[j]$ car $H_{t/2}$ noyau de Markov

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]) = H_t[i,j]-\pi[j]}$

21) Par π réversibilité $H_{t/2}[i,k]\pi[i] = H_{t/2}[k,i]\pi[k]$
Donc $H_{t/2}[i,k]\pi[i] - \pi[i]\pi[k] = H_{t/2}[k,i]\pi[k] - \pi[i]\pi[k]$
Donc $\pi[i](H_{t/2}[i,k]-\pi[k]) = \pi[k](H_{t/2}[k,i]-\pi[i])$
Ou encore : $\frac{H_{t/2}[i,k]-\pi[k]}{\pi[k]} = \frac{H_{t/2}[k,i]-\pi[i]}{\pi[i]}$

Avec Q20) on a donc :
$H_t[i,j]-\pi[j] = \sum_{k=1}^{N}(H_{t/2}[i,k]-\pi[k])(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]) = \sum_{k=1}^{N}\frac{H_{t/2}[i,k]-\pi[k]}{\pi[k]}(H_{t/2}[k,j]-\pi[j])\pi[k]$

Avec la relation précédente : $H_t[i,j]-\pi[j] = \sum_{k=1}^{N}\frac{H_{t/2}[k,i]-\pi[i]}{\pi[i]}(H_{t/2}[k,j]-\pi[j])\pi[k]$

Notons W le vecteur tel que $W[k] = H_{t/2}[k,i]-\pi[i]$ et W' le vecteur tel que $W'[k] = H_{t/2}[k,j]-\pi[j]$
Alors : $H_t[i,j]-\pi[j] = \frac{1}{\pi[i]} < W, W' >$
On remarque alors que $W = H_{t/2}E_i - \pi[i]U$ et que $W' = H_{t/2}E_j - \pi[j]U$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|H_t[i,j]-\pi[j]| \leq \frac{1}{\pi[i]}\,||W||\,||W'||$

Mais par Q19) (avec $t/2$ au lieu de t) : $||W|| \leq e^{-\lambda t/2}\sqrt{\pi[i]}$ et $||W'|| \leq e^{-\lambda t/2}\sqrt{\pi[j]}$ donc :
$|H_t[i,j]-\pi[j]| \leq \frac{1}{\pi[i]}e^{-\lambda t/2}\sqrt{\pi[i]}e^{-\lambda t/2}\sqrt{\pi[j]}$ donc $\boxed{|H_t[i,j]-\pi[j]| \leq e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}}$

Comme λ est la plus petite valeur propre non nulle de u alors $\lambda > 0$ et donc $e^{-\lambda t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Avec l'inégalité ci-dessus on en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i,j]-\pi[j] = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j]}$

Remarque : On peut aussi écrire $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t = H$ avec $H = U\pi = \begin{pmatrix} \pi[1] & \pi[2] & \dots & \pi[N] \\ \pi[1] & \pi[2] & \dots & \pi[N] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi[1] & \pi[2] & \dots & \pi[N] \end{pmatrix}$

Comme π est une probabilité alors $H^2 = H$ et H est un noyau de Markov.