Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°10

Exercice 1

a) On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n}$ et $u_n(z) = a_n t^n$

Pour $t = 0$: $n \geq 1 \Rightarrow u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(t)$ est convergente.

Pour $t \neq 0$, on a $u_n(t) \neq 0$ et on peut donc considérer :
$\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = \frac{(2n+2)!|t|^{n+1}}{(n+1)!^2}\frac{n!^2}{(2n+2)!|t|^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|t|$

On peut alors appliquer la règle de D'Alembert, et on en déduit :
$|t| < \frac{1}{4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| < 1 \Rightarrow \sum u_n(z)$ convergente
$|t| > \frac{1}{4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| > 1 \Rightarrow \sum u_n(z)$ divergente

Comme $R = sup(\{t \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(t)$ convergente $\})$ alors on en déduit : $\boxed{R = \frac{1}{4}}$

b) • Tout d'abord, comme f est une série entière, alors f est C^∞ et dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$
On en déduit en particulier que : $\forall t \in]-R, R[$, $f'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$

• En reprenant le calcul du a) (pour $t = 1$) on a : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2)}{n+1}$ donc $(n+1)a_{n+1} = (4n+2)a_n$

Pour $t \in]-R, R[$ on multiplie cette dernière égalité par t^n et on somme pour n variant de $n = 0$ à $n = +\infty$
On peut faire ceci car tout les séries entières considérées ont même rayon de convergence R.
On obtient : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4n+2)a_n t^n$ on pose $p = n+1$ dans la première somme
$\Rightarrow \sum\limits_{p=1}^{+\infty} p a_p t^{p-1} = 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$
$\Rightarrow \sum\limits_{p=1}^{+\infty} p a_p t^{p-1} = 4t\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$
$\Rightarrow f'(t) = 4tf'(t) + 2f(t)$

Donc : $\boxed{f \text{ est solution sur }]-R, R[\text{ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène :}}$
$\boxed{E \Leftrightarrow (1-4t)f'(t) = 2f(t)}$

c) $\int \frac{2}{1-4t}dt = \frac{-1}{2}ln(1-4t)$
D'après le cours on sait que : $E \Leftrightarrow f(t) = Aexp(\frac{-1}{2}ln(1-4t)) = \frac{A}{\sqrt{1-4t}}$ avec $A \in \mathbb{R}$
On a de plus $f(0) = a_0 = 1$ donc $A = 1$ et donc : $\boxed{\forall t \in]-R, R[\ ,\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}}$

d) • Pour $t = R$, avec les notations du a) :
$u_n(\frac{1}{4}) = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!^2}\frac{1}{4^n}$
On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ et on alors :

$u_n(\frac{1}{4}) \sim \frac{\sqrt{4\pi n (2n)^{2n} e^{-2n}}}{2\pi n n^{2n} e^{-2n}} \frac{1}{4^n} \sim \frac{\sqrt{4\pi n 4^n}}{2\pi n} \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} > 0$

Comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, alors, par la règle de l'équivalent pour les séries à termes positifs, on a $\sum u_n(\frac{1}{4})$ divergente.

- Pour $t = -R$ alors $\sum u_n(\frac{-1}{4}) = \sum (-1)^n u_n(\frac{1}{4})$

En reprenant encore le calcul du a) pour $t = \frac{1}{4}$: $\left|\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4} < 1$ puisque $4n^2 + 6n + 2 \leq 4n^2 + 8n + 4 \Leftrightarrow 0 \leq 2n + 2$ et la dernière inégalité est évidente.

On a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|u_n(\frac{-1}{4})\right| = 0$ avec l'équivalent trouvé précédement.

On a donc $\begin{cases} \sum u_n(\frac{-1}{4}) \text{ est alternée} \\ (\left|u_n(\frac{-1}{4})\right|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left|u_n(\frac{-1}{4})\right| = 0 \end{cases}$

On peut alors appliquer le théorème spécial et on en déduit : $\sum u_n(\frac{-1}{4})$ convergente.

Bilan : $\boxed{\sum u_n(t) \text{ est convergente pour } t = \frac{-1}{4} \text{ et divergente pour } t = \frac{1}{4}}$

Exercice 2

1°) Calculons χ_{M_a} le polynôme caractéristique de M_a.

$\chi_{M_a}(X) = det(XI_3 - M_a) = \begin{vmatrix} X-1 & a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$

Par blocs : $\chi_{M_a}(X) = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$

Comme $\lambda \in sp(M_a) \Leftrightarrow \chi_{M_a}(\lambda) = 0$, alors $sp(M_a) = \{-1; 1\}$ avec 1 qui est une valeur propre double.

-1 est valeur propre simple donc $dim(E_{-1}(M_a)) = dim(ker(M_a + I_3)) = 1$

On a alors : M_a diagonalisable

$\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3 (car $M_a \in M_3(\mathbb{R})$)

$\Leftrightarrow dim(E_{-1}(M_a)) + dim(E_1(M_a)) = 3 \Leftrightarrow 1 + dim(E_1(M_a)) = 3 \Leftrightarrow dim(E_1(M_a)) = 2$

Or $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) = ker(M_a - I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ y = z \end{cases}$

Cas 1 : $a \neq 0$

Alors $ay = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et donc $E_1(M_a) = vect(e_2)$ avec $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $dim(E_1(M_a)) = 1$ et M_a n'est pas diagonalisable.

Cas 2 $a = 0$

Alors $ay = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ et donc $E_1(M_a)$ est le plan d'équation $y = z$, donc $dim(E_1(M_a)) = 2$ et donc M_a diagonalisable.

Bilan : $\boxed{M_a \text{ diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a = 0}$

2°) $det(M_a) = -1 \neq 0$ (par Sarrus par exemple) donc $\boxed{M_a \text{ est toujours inversible.}}$

3°) Comme M_a n'est pas diagonalisable alors $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(M_a) = ker(M_a + I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -ay \\ z = -y \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(M_a) = vect(e_1)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

On cherche e_3 sous la forme $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour que $Ae_3 = e_3 + e_2$

Alors $Ae_3 = e_3 + e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 1 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 1 \\ y = z \end{cases}$ Posons donc $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ (possible car $a \neq 0$)

Notons $B' = (e_1, e_2, e_3)$ et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Alors $det_B(B') = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{a} \\ 2 & 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \frac{4}{a} \neq 0$ et donc B' est une base.

Comme B' est une base et que l'on a les relations $\begin{cases} Ae_1 = -e_1 \\ Ae_2 = e_2 \\ Ae_3 = e_3 + e_2 \end{cases}$ alors par la formule de changement de base : $M_a = P_a T P_a^{-1}$ avec $P_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{a} \\ 2 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A \text{ est donc semblable à } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4°) Si on note (S) le système différentiel posé et $X'(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ alors $X'(t) = AX(t)$ avec $A = M_1$

On a donc $A = PTP^{-1}$ avec $P = P_1$

Alors $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PTP^{-1}X(t)$, en multipliant à gauche par P^{-1} on a :

$(S) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = TY(t)$ en posant $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ (t) \end{pmatrix}$

On a alors $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) + w(t) \\ w'(t) = w(t) \end{cases}$

La première et la troisième équation sont des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants homogènes. On a donc : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = \alpha e^{-t} \\ w(t) = \beta e^t \\ v'(t) - v(t) = \beta e^t \end{cases}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Il reste à résoudre $v'(t) - v(t) = \beta e^t$.
On peut chercher v sous la forme $v(t) = \lambda(t)e^t$ (changement de fonction inconnue possible car $e^t \neq 0$).
Alors $v'(t) - v(t) = \beta e^t$
$\Leftrightarrow \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = \beta e^t \Leftrightarrow \lambda'(t) = \beta \Leftrightarrow \lambda(t) = \beta + \gamma t$ avec $\gamma \in \mathbb{R} \Leftrightarrow v(t) = (\beta + \gamma t)e^t$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$

On a donc $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ (\beta+\gamma t)e^t \\ w(t) = \beta e^t \end{pmatrix}$

Mais $Y(t) = P^{-1}X(t) \Rightarrow X(t) = PY(t)$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-t} + (\beta+\gamma t)e^t \\ y(t) = -2\alpha e^t + \beta e^t \\ z(t) = 2\alpha e^t + \beta e^t \end{cases}}$

On a donc les solutions de (S) avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 3

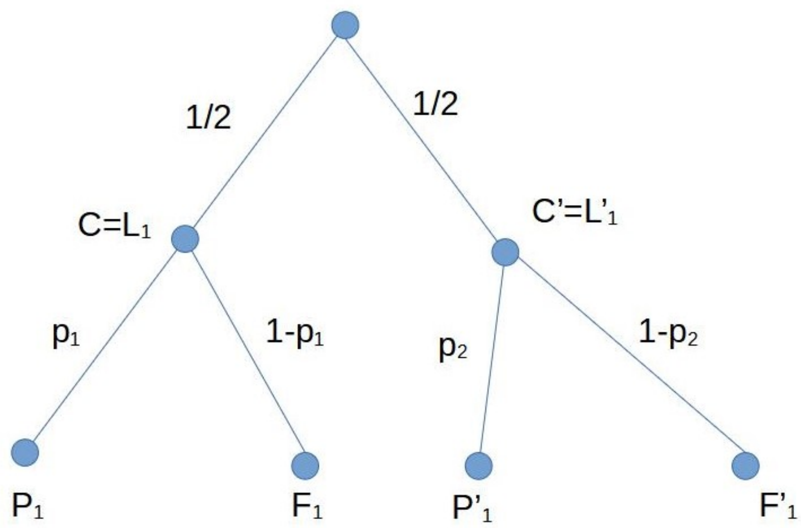
0°) a) On a $P(P_i|L'_i) = P(P'_i|L_i) = P(F_i|L'_i) = P(F'_i|L_i) = 0$ car, par exemple, si on ne lance pas la pièce 1, on ne peut pas obtenir pile ou face avec cette pièce.

0°) b) On a clairement : $\boxed{L_1 = C \text{ et } L'_1 = C'}$

1°) a) Si I est un ensemble fini ou dénombrable non vide et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements alors :
la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements
si et seulement si $\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (A_i et A_j incompatibles) et $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
Comme $\overline{C} = C'$ alors $\boxed{(C, C') \text{ est un système complet d'événements.}}$

1°) b) Par équiprobabilité $P(C) = P(C')$ et comme (C, C') est un système complet d'événements
$P(C) + P(C') = 1$ On a donc : $\boxed{P(C) = P(C') = \frac{1}{2}}$

2°) a)



2°) b) Par la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements (C, C')
On a $P(P_1) = P(P_1|C)P(C) + P(P_1|C')P(C') = P(P_1|L_1)P(L_1) + P(P_1|L_1')P(L_1') = p_1\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{p_1}{2}$

Donc $\boxed{P(P_1) = \frac{p_1}{2}}$

2°) c) De même (on peut s'aider de l'arbre du a) : $\boxed{P(F_1) = \frac{1-p_1}{2},\ P(P_1') = \frac{p_2}{2} \text{ et } P(F_1') = \frac{1-p_2}{2}}$

3°) a) Si on effectue le second lancer avec la pièce 1 (événement L_2), c'est que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1 et à donné pile, ou que le premier lancer à été effectué avec la pièce 2 et à donné face.
On a donc $L_2 = P_1 \cup F_1'$, comme P_1 et F_1' sont incompatibles alors : $P(L_2) = P(P_1) + P(F_1')$
On utilise les résultats du 2°) et on a : $P(L_2) = \frac{p_1}{2} + \frac{1-p_2}{2} = \frac{1+p_1-p_2}{2}$

La probabilité d'effectuer le deuxième lancer avec la pièce 1 est donc de $\boxed{P(L_2) = \frac{1+p_1-p_2}{2}}$

3°) b) On cherche $P(L_1'|L_2) = P(C'|L_2)$
Par la formule de Bayes : $P(L_1'|L_2) = \frac{P(L_2|L_1')P(L_1')}{P(L_2)}$
D'après le 2°)c) $P(L_2) = \frac{1+p_1-p_2}{2}$, on sait aussi que $P(L_1') = P(C') = \frac{1}{2}$.
On a : $P(L_2|L_1') = P(F_1'|L_1') = 1 - p_2$
Donc $P(L_1'|L_2) = \frac{(1-p_2)\frac{1}{2}}{\frac{1+p_1-p_2}{2}} = \frac{1-p_2}{1-p_2+p_1}$

Si on effectue le second lancer avec la pièce 1, la probabilité que le premier lancer est été effectué avec la pièce 2 est de $\boxed{\frac{1-p_2}{1-p_2+p_1}}$

4°) a) L'événement A correspond à l'événement obtenir dans cet ordre la série $\boxed{\text{PFPF}}$, que ce soit en commençant par la pièce 1 ou la pièce 2.

4°) b) Comme $A_1 = P_1 \cap F_2 \cap P_3' \cap F_4'$
par la formule des probabilités composées on a :
$P(A_1) = P(P_1)P(F_2|P_1)P(P_3'|P_1 \cap F_2)P(F_4'|P_1 \cap F_2 \cap P_3')$
Mais $P(F_4'|P_1 \cap F_2 \cap P_3') = P(F_4'|L_4') = 1 - p_2$
$P(P_3'|P_1 \cap F_2) = P(P_3'|L_3') = p_2$
$P(F_2|P_1) = P(F_2|L_2) = 1 - p_1$
De plus $P(P_1) = \frac{p_1}{2}$ par le 2°) b) donc
$P(A_1) = \frac{p_1}{2}(1-p_1)p_2(1-p_2) = \frac{p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}{2}$
De même : $P(A_2) = P(P_1')P(F_2'|P_1')P(P_3|P_1' \cap F_2')P(F_4|P_1' \cap F_2' \cap P_3)$
En inversant le rôle des deux pièces : $P(A_2) = \frac{p_2p_1(1-p_1)(1-p_2)}{2}$
Comme A_1 et A_2 sont incompatibles alors $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$
Donc $P(A) = p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)$.

Bilan : $\boxed{P(A) = p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}$

5°) a) Pour $n=1$: $D_1 = C$ donc $p(D_1)=\frac{1}{2}$
Pour $n>1$: Si on utilise la pièce 1 pour la première fois au n-ième lancer, c'est que la pièce 2 a été choisie en premier et donc lancer le premier coup et qu'ensuite on a obtenue des piles jusqu'au face du n-1 ième coup qui fait que l'on change pour la première fois de pièce et que l'on utilise P1.
On a pour $n \geq 2$: $D_n = P'_1 \cap P'_2 \cap ... \cap P'_{n-2} \cap F'_{n-1} = (\bigcap\limits_{1\leq k\leq n-2} P'_k) \cap F'_{n-1}$
Par la formule des probabilités composées on a :
$P(D_n) = P(P'_1)P(P'_2|P'_1)P(P'_3|P'_1 \cap F'_2)...P(P'_{n-2}|P'_1 \cap P'_2 \cap ... \cap P'_{n-3})P(F'_{n-1}|P'_1 \cap P'_2 \cap ... \cap P'_{n-2})$
On sait que : $P(P'_1) = \frac{p_2}{2}$ part le 2°)c).
Pour les autres lancers on sait que l'on lance la pièce 2, les $P(P'_k|...)$ valent donc p_2 et
$P(F'_{n-1}|P'_1 \cap P'_2 \cap ... \cap P'_{n-2}) = 1-p_2$
On a donc $P(D_n) = \frac{p_2}{2}(p_2)^{n-3}(1-p_2) = \frac{p_2^{n-2}(1-p_2)}{2}$

Bilan : $\boxed{P(D_n) = \frac{p_2^{n-2}(1-p_2)}{2} \text{ si } n \geq 2 \text{ et } P(D_1) = \frac{1}{2}}$

5°) b) $\sum\limits_{n\geq 2} P(D_n)$ est une série géométrique de raison p_2 avec $0<p_2<1$ donc elle est convergente.
$\sum\limits_{n\geq 1} P(D_n) = P(D_1) + \sum\limits_{n\geq 2} \frac{p_2^{n-2}(1-p_2)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1-p_2}{2} \sum\limits_{n\geq 2} p_2^{n-2}$
Somme des termes d'une suite géométrique, on sait donc d'après le cours que :
$\sum\limits_{n\geq 1} P(D_n) = \frac{1}{2} + \frac{1-p_2}{2}\frac{1}{1-p_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Bilan : $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} P(D_n) = 1}$

5°) c) Considérons J l'événement ne jamais utilisé la pièce 1.
Alors $\overline{J} = \bigcup\limits_{n\geq 1} D_n$
Comme les D_n sont incompatibles deux à deux alors : $P(\overline{J}) = \sum\limits_{n\geq 1} P(D_n)$ et donc $P(\overline{J}) = 1$ par le b).
Comme $P(J) = 1 - P(\overline{J})$ alors $P(J) = 0$

$\boxed{\text{L'événement ne jamais utiliser la pièce 1 a donc une probabilité nulle.}}$