Mathématiques : Correction du devoir à la maison n°9

EXERCICE n°1 : e3a PSI 2021, Exercice 1

(1.1) On a $\forall x \in J\ ,\ a_{-1}ln(1+x) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -a_0$
Or si $a_{-1} \neq 0$ on a : $|a_{-1}ln(1+x)| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On a donc $\boxed{a_{-1} = 0}$

(1.2) En utilisant (1.1) il reste : $\forall x \in J\ ,\ \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(1+x)^k} = 0$
donc, en multipliant par $(1+x)^p$: $\forall x \in J\ ,\ \sum_{k=0}^{p} a_k(1+x)^{p-k} = 0$
En posant $y = 1+x$, on a : $\forall y \in]0, +\infty[\ ,\ \sum_{k=0}^{p} a_k y^{p-k} = 0$
Comme pour tout k, $p-k \geq 0$, on a un polynôme nul sur une infinité de valeurs et on en déduit : $\forall k \in [\![0;p]\!]\ ,\ a_k = 0$

On a donc : $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une famille libre.}}$

(1.3) Par définition, $\mathscr{B}$ est génératrice de E. On vient de voir que c'était une famille libre. Finalement c'est une base de E donc $dim(E) = card(\mathscr{B})$ et donc $\boxed{dim(E) = p+2}$

(2.1) Posons $\forall k \in [\![-1,p]\!]\ ,\ g_k = u(f_k)$
Alors $\forall x \in J\ ,\ g_{-1}(x) = (1+x)\frac{1}{1+x} = 1 = f_0(x)$ donc $u(f_{-1}) = f_0$
Pour $k \in [\![0,p]\!]$, on a : $g_k(x) = (1+x)\frac{-k}{(1+x)^{k+1}} = \frac{-k}{(1+x)^k}$ et donc $u(f_k) = -kf_k$

On a donc : $\boxed{u(f_{-1}) = f_0 \text{ et } \forall k \in [\![0,p]\!]\ ,\ u(f_k) = -kf_k}$

(2.2) Avec (2.1) on a $u(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$ et donc par linéarité $u(E) \subset E$
Par linéarité de la dérivation, on a : $\forall (f,g,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}\ ,\ u(f+\lambda g) = u(f) + \lambda u(g)$, donc u est linéaire.

Finalement : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

(2.3) • $u(f) = 0_E \Leftrightarrow \forall x \in J\ ,\ (1+x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in J\ ,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \in Vect(f_0)$

On a donc $ker(u) = Vect(f_0)$ et donc $dim(ker(u)) = 1$.

• Avec le théorème du rang on a : $dim(Im(u)) = dim(E) - dim(Ker(u)) = p+2-1 = p+1$
De plus, avec (2.1) : $Vect(f_0, f_1, \ldots, f_p) \subset Im(u)$ car $f_0 = u(f_{-1})$ et $\forall k \in [\![2,p]\!]\ ,\ f_k = u(\frac{-f_k}{k})$

Pat égalité des dimensions $Im(u) = Vect(f_0, f_1, \ldots, f_p)$

• Bilan : $\boxed{ker(u) = Vect(f_0) \text{ et } Im(u) = Vect(f_0, f_1, \ldots, f_p)}$

(2.4) Comme la famille $\mathscr{B}$ est libre et que $Im(u) = Vect(f_0, f_1, \ldots, f_p)$ alors $f_{-1} \notin Im(u)$ et donc $\boxed{u^{-1}(f_{-1}) = \emptyset}$

(2.5) Avec (2.1) on a : $\boxed{M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ avec } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = diag(-1,-2,\dots,-p)}$

(2.6) M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont sur la diagonale et on en déduit que 0 est valeur propre double. Or $dim(ker(u)) = 1$ donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

(2.7) $M^2 = diag(0,0,-1,-2,\dots,-p)$, donc M^2 est diagonale et donc $\boxed{u^2 \text{ est diagonalisable.}}$

(3) $(ED) \Leftrightarrow ln(1+t) = (1+t)y'(t) \Leftrightarrow y'(t) = (ln(1+t))'ln(1+t) \Leftrightarrow y(t) = \frac{(ln(1+t))^2}{2} + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Les solutions de } (ED) \text{ s'écrivent : } \forall t \in J\ ,\ y(t) = \frac{(ln(1+t))^2}{2} + \alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$

(4.1) Avec (3) on déduit : $\forall t \in J\ ,\ h_2(t) = \frac{(ln(1+t))^2}{2}$
$h_2(t) = (1+t)y'(t) \Leftrightarrow y'(t) = (ln(1+t))'\frac{(ln(1+t))^2}{2} \Leftrightarrow y(t) = \frac{(ln(1+t))^3}{6} + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

Comme on veut $h_3(0) = 0$ alors : $\boxed{\forall t \in J\ ,\ h_3(t) = \frac{(ln(1+t))^3}{3!}}$

(4.2) Montrons par récurrence que : $\forall k \geq 2\ ,\ \forall t \in J\ ,\ h_k(t) = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}$

La propriété a été initialisée pour $k = 2$ et $k = 3$ a la question (4.1).

Hérédité : soit $k \geq 3$, on suppose que : $\forall t \in J\ ,\ h_{k-1}(t) = \frac{(ln(1+t))^{k-1}}{(k-1)!}$
Alors : $(1+t)h_k'(t) = h_{k-1}(t) \Rightarrow h_k'(t) = (ln(1+t))'\frac{(ln(1+t))^{k-1}}{(k-1)!} \Rightarrow h_k(t) = \frac{(ln(1+t))^k}{k!} + \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.
Mais $h_k(0) = 0$ donne $\gamma = 0$ et donc $h_k(t) = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}$

Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 2\ ,\ \forall t \in J\ ,\ h_k(t) = \frac{(ln(1+t))^k}{k!}}$

Remarque : $h_k = \frac{(f_{-1})^k}{k!}$

(5.1) Pour $t \in J\ ,\ \sum_{k=2}^{+\infty} h_k(t)$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(ln(1+t))^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ln(1+t))^k}{k!} - ln(1+t) - 1$$
$$= exp(ln(1+t)) - ln(1+t) - 1$$
$= t - ln(1+t)$, on a reconnut la série exponentielle qui converge sur $\mathbb{R}$.

On a donc : $\boxed{\sum_{k \geq 2} h_k \text{ converge simplement sur } J \text{ vers } H : t \mapsto t - ln(1+t)}$

(5.2) Raisonnons par l'absurde : si $H \in E$
Alors $H + f_{-1} \in E$ et donc $G : t \mapsto t \in E$
Mais on remarque que les éléments de $\mathscr{B}$ sont, au voisinage de $+\infty$, négligeable devant G, donc par linéarité, tout élément de E est négligeable devant G au voisinage de $+\infty$ et donc $G = o(G)$!!! Absurde!!!
Bilan : $\boxed{H \notin E}$

(5.3) Avec (5.1) on a $\forall t \in J\ ,\ H'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = f_0(t) - f_1(t)$ et donc $\boxed{H' \in E}$

EXERCICE n°2 : e3a PSI 2021, Exercice 4

1. On note, pour $j \in [\![1, m]\!]$, p_j le projecteur sur E_j parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{k \in [\![1,m]\!] \\ k \neq j}} E_k$

Comme E_j est non vide alors p_j est non nul.

Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} E_j$ et $d_j = dim(E_j)$.

Alors $M_{\mathscr{B}}(u) = diag(\lambda_1 I_{d_1}, \lambda_2 I_{d_2}, \dots, \lambda_p I_{d_p})$ et $M_{\mathscr{B}}(p_j) = diag(0_{d_1+\cdots+d_{j-1}}, I_{d_j}, 0_{d_{j+1}+\cdots+d_p})$

On remarque alors que $u = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j p_j$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j$

$$\boxed{\text{Il existe donc } (p_i)_{i \in [\![1,m]\!]} \text{ une famille de projecteurs non nuls tel que : } \forall k \in \mathbb{N} \ , \ u^k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j}$$

2.1) Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^k p_j$

Les sommes sont finies donc on peut les intervertir et donc $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k = \sum\limits_{j=1}^{m} [\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \lambda_j^k] p_j = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j$

On a bien : $\boxed{\forall P \in \mathbb{C}[X] \ , \ P(u) = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j) p_j}$

2.2) Posons $Q = \prod\limits_{j=1}^{m} (X - \lambda_j)$ qui est scindé simple.

Alors, avec (2.1) : $Q(u) = \sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{Q(\lambda_j)}_{=0} p_j = 0$

Donc Q est un polynôme scindé simple, annulateur de u et donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

2.3.1) Comme les λ_j sont distincts, on reconnaît les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Alors, d'après le cours : $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2 \ , \ L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}}$

2.3.2) • Chaque L_j est de degré $m-1$, donc $\mathscr{B}$ est une famille de $C_{m-1}[X]$.

• Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in C^m$ tel que : $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j L_j = 0$

Soit $i \in [\![1, m]\!]$.

En évaluant la relation ci-dessus en λ_i on obtient : $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j L_j(\lambda_i) = 0$, et avec la relation de 2.3.1) : $\lambda_i = 0$

On en déduit que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

• $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ et possède $dim(\mathbb{C}_{m-1}[X])$ vecteurs, donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}_{m-1}[X]}$

2.3.3) Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Alors, comme $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j L_j$

En évaluant cette relation en λ_i et en tenant compte de 2.3.1) on obtient : $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\alpha_i = P(\lambda_i)$

On a donc : $\boxed{P = \sum\limits_{j=1}^{m} P(\lambda_j) L_j}$

2.4) Si on applique 2.1) avec $P = L_j$ on obtient : $\boxed{p_j = L_j(u)}$

2.5) • On sait que $sp(u)$ est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur Q, donc : $sp(u) \subset \{\lambda_j \ , \ j \in [\![1, m]\!]\}$

• Fixons $j \in [\![1, m]\!]$ et montrons que λ_j est valeur propre de u.
p_j est non nul, donc $\exists x \in Im(p_j)$ que l'on écrit $x = p_j(y) = L_j(u)(y)$ avec $y \in E$, en utilisant (2.4)

Alors $(u - \lambda_j Id_E)(y) = [(u - \lambda_j Id_E) \circ L_j(u)](y)$
Mais on remarque que $(X - \lambda_j)L_j(X) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k \in [\![1,m]\!] \\ k \neq j}} (\lambda_j - \lambda_)} Q(X)$ donc $(u - \lambda_j Id_E)(y) = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k \in [\![1,m]\!] \\ k \neq j}} (\lambda_j - \lambda_)} Q(u)(y) = 0_E$
puisque Q est un polynôme annulateur de u.
Il reste $(u - \lambda_j Id_E)(y) = 0_E \Rightarrow u(y) = \lambda_j y$ donc y (qui est non nul car $x = u(y)$ non nul) est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_j et donc $\lambda_j \in sp(u)$.
On en déduit : $\{\lambda_j \ , \ j \in [\![1, m]\!]\} \subset sp(u)$

• Comme on a les deux inclusions alors : $\boxed{sp(u) = \{\lambda_j \ , \ j \in [\![1, m]\!]\}}$

Problème : ccINP PSI 2024, problème 2

I.1) On remarque que : $u_0(e_p) = 0$ et que $\forall j \in [\![1; p-1]\!] \ , \ u_0(e_j) = e_{j+1}$
On en déduit que : $\boxed{u_0^2(e_p) = u_0(e_{p-1}) = 0 \text{ et que } \forall j \in [\![1; p-2]\!] \ , \ u_0^2(e_j) = e_{j+2}}$

et que : $\boxed{J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

De même : $\boxed{J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } J_0^p = (0), \text{ alors } J_0 \text{ est nilpotente d'indice } p.}$

I.2) Le polynôme caractéristique de u_λ et est le même que celui de J_λ et vaut $\chi_{u_\lambda}(X) = (X - \lambda)^p$.
Comme $a \in sp(u_\lambda) \Leftrightarrow \chi_{u_\lambda}(a) = 0$ alors $\boxed{sp(u_\lambda) = \{\lambda\}}$

$J_\lambda - \lambda I_p = J_0$ dont le rang est clairement $p - 1$.
On en déduit, avec le théorème du rang que : $dim(ker(u_\lambda - \lambda Id_{\mathbb{R}^p})) = p - rg(J_0) = p - (p-1) = 1$
Comme en "lisant la matrice" : $u_\lambda(e_p) = \lambda e_p$ (et de plus $e_p \neq 0_E$) on a finalement : $\boxed{ker(u_\lambda - \lambda Id_{\mathbb{R}^p}) = Vect(e_p)}$

I.3) V est stable par u_λ
$\Leftrightarrow \forall x \in V \ , \ u_\lambda(x) \in V$
$\Leftrightarrow \forall x \in V \ , \ \exists y \in V \ , \ u_\lambda(x) = y$
$\Leftrightarrow \forall x \in V \ , \ \exists y \in V \ , \ \lambda x + u_0(x) = y$
$\Leftrightarrow \forall x \in V \ , \ \exists y \in V \ , \ u_0(x) = \underbrace{y - \lambda x}_{\in V}$ car y et x sont dans V et V est un e.v.
$\Leftrightarrow \forall x \in V \ , \ \exists Y \in V \ , \ u_0(x) = Y \Leftrightarrow V$ est stable par u_0
On a donc bien : $\boxed{V \text{ est stable par } u_\lambda \Leftrightarrow V \text{ est stable par } u_0}$

I.4) En raison de la stabilité de V, la matrice de u_λ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{p-k,k}(\mathbb{R})} & C \end{pmatrix}$ avec $A \in M_k(\mathbb{R})$, $B \in M_{k,p-k}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p-k}(\mathbb{R})$

I.5) • Le polynôme caractéristique de u_λ est donc $\chi_{u_\lambda}(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$
On a donc $\chi_A(X)$ qui divise $\chi_{u_\lambda}(X)$, mais comme A est la matrice de v relativement à $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})$ alors χ_A est le polynôme caractéristique de v.
On a donc que : $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } v \text{ divise celui de } u_\lambda}$

• Mais comme $\chi_{u_\lambda}(X) = (X-\lambda)^p$ et que χ_v divise χ_{u_λ} alors λ est racine de χ_v
et donc λ est valeur propre de v.
Donc $\exists X \in V \ \ , \ v(X) = \lambda X$ et $X \neq 0_E$
$\Rightarrow \exists X \in V \ , \ u_\lambda(X) = \lambda X$ et $X \neq 0_E$
$\Rightarrow \exists X \in V \ , \ X \in ker(u_\lambda - \lambda Id) = Vect(e_p)$ et $X \neq 0_E$

On a donc $\begin{cases} X \in V \\ X \neq 0_E \\ X \in Vect(e_p) \end{cases}$ ce qui donne $e_p \in V$ On en conclut : $\boxed{e_p \in V}$

I.6) Par l'absurde, si il existe une décomposition de la forme $\mathbb{R}^p = V \oplus W$ avec V et W stable par u_λ et non réduit au vecteur non nul alors, on peut appliquer Q34) à V et W et on a $e_p \in V \cap W$, mais $V \cap W = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ et $e_p \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ absurde.

Conclusion :
$\boxed{\text{il n'existe pas de décomposition de la forme } \mathbb{R}^p = V \oplus W \text{ avec } V \text{ et } W \text{ stable par } u_\lambda \text{ et non réduit au vecteur non}}$

II.1) Puisque $\tilde{X}(t) = e^{\lambda t}X_0$ alors $\tilde{X}$ est C^1 et $\tilde{X}'(t) = \lambda e^{\lambda t}X_0 = e^{\lambda t}\lambda X_0$
Mais $J_\lambda X_0 = \lambda X_0$ par définition de X_0 vecteur propre de J_0 associé à J_0, donc :
$\tilde{X}'(t) = e^{\lambda t}J_\lambda X_0 = J_\lambda e^{\lambda t}X_0 = J_\lambda \tilde{X}(t)$ et on a bien : $\boxed{\tilde{X} \text{ est une solution particulière de } (S)}$

II.2) φ est dérivable car chaque coordonnée de $\varphi(t)$ est une fonction polynomiale en t.
On a : $\varphi'(t)$

$= \frac{d}{dt}\big(\sum_{k=0}^{p-1} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k\big)$

$= \frac{d}{dt}\big(e^{\lambda t}I_r + \sum_{k=1}^{p-1} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k\big)$

$= \lambda e^{\lambda t}I_r + \sum_{k=1}^{p-1}[\lambda e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k + e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}J_0^k]$

$= \lambda e^{\lambda t}I_r + \sum_{k=1}^{p-1}\lambda e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k + \sum_{k=1}^{p-1}e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}J_0^k$

$= \lambda e^{\lambda t}I_r + \sum_{k=1}^{p-1}\lambda e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k + \sum_{k=0}^{p-2}e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^{k+1}$

$= \lambda e^{\lambda t}I_r + \sum_{k=1}^{p-2}\lambda e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k + \lambda e^{\lambda t}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}J_0^{p-1} + e^{\lambda t}J_0 + \sum_{k=0}^{p-2}e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^{k+1}$

$= e^{\lambda t}(\lambda I_r + J_0) + \sum_{k=1}^{p-2}e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}[\lambda J_0^k + J_0^{k+1}] + \lambda e^{\lambda t}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}J_0^{p-1}$

$= e^{\lambda t}\underbrace{(\lambda I_r + J_0)}_{J_\lambda} + \sum_{k=1}^{p-2}e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k\underbrace{(\lambda I_r + J_0)}_{J_\lambda} + e^{\lambda t}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\lambda J_0^{p-1}$

On remarque que : $J_\lambda J_0^{p-1} = (\lambda I_r + J_0)J_0^{p-1} = \lambda J_0^{p-1} + \underbrace{J_0^p}_{nul} = \lambda J_0^{p-1}$

Donc $\varphi'(t) = e^{\lambda t}J_\lambda + \sum_{k=1}^{p-2} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k \underbrace{(\lambda I_r + J_0)}_{J_\lambda} + e^{\lambda t}\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}J_\lambda J_0^{p-1} = J_\lambda\big(e^{\lambda t}I_r + \sum_{k=1}^{p-1} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k\big) = J_\lambda exp(tJ_\lambda)$

Il est clair que J_λ et $exp(tJ_\lambda)$ commutent car $exp(tJ_\lambda)$ est une combinaison linéaire de J_0 et que $J_\lambda = \lambda I_r + J_0$

On a donc bien : $\boxed{\varphi'(t) = J_\lambda exp(tJ_\lambda) = exp(tJ_\lambda)J_\lambda}$

II.3) • Comme $J_0^p = (0)$ alors $\forall k \geq p\ ,\ J_0^k = (0)$ donc $e^{\lambda t}\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}J_0^k = (0)$ et donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ exp(tJ_\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k}$

• On va pouvoir multiplier deux les sommes ci-dessous, car en réalité, elles ne sont pas infinie.

$exp(tJ_\lambda)exp(-tJ_\lambda)$
$= \big(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}J_0^k\big)\big(\sum_{\ell=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(-t)^\ell}{\ell!}J_0^\ell\big)$ on a simplifier les $exp(\lambda t)exp(-\lambda t)$
$= \big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}J_0^k\big)\big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\ell t^\ell}{\ell!}J_0^\ell\big)$
$= \sum_{j=0}^{+\infty}[\sum_{k=0}^{j}\frac{t^k}{k!}(-1)^{k-j}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}]J_0^j$
$= I_r + \sum_{j=1}^{+\infty} j![\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{k-j}]t^j J_0^j$
$= I_r + \sum_{j=1}^{+\infty} j!(1-1)^j t^j J_0^j$
$= I_r$

Donc $exp(tJ_\lambda)exp(-tJ_\lambda) = I_r$ ce qui montre que :
$\boxed{exp(tJ_\lambda) \text{ est inversible et que } [exp(tJ_\lambda)]^{-1} = exp(-tJ_\lambda)}$

II.4) • Y est C^1 comme produit de fonctions C^1 et $Y'(t) = \frac{d}{dt}\big(e^{-tJ_\lambda}X(t)\big)$
On utilise Q37) et on a : $Y'(t) = -e^{-tJ_\lambda}J_\lambda X(t) + e^{-tJ_\lambda}X'(t) = e^{-tJ_\lambda}[X'(t) - J_\lambda X(t)]$

Mais e^{-tJ_λ} est inversible par la question Q39).

On a alors : X solution de (S)
$\Leftrightarrow X'(t) = J_\lambda X(t)$
$\Leftrightarrow Y'(t) = 0$
$\Leftrightarrow Y$ est constante sur $\mathbb{R}$ (intervalle)

Bilan : $\boxed{X \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow Y \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$

• Y constante
$\Leftrightarrow \exists X_0 \in E\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ Y(t) = X_0$
$\Leftrightarrow \exists X_0 \in E\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ e^{-tJ_\lambda}X(t) = X_0$
$\Leftrightarrow \exists X_0 \in E\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ X(t) = e^{tJ_\lambda}X_0$

$\boxed{\text{Les solutions de } (S) \text{ sont exactement les fonctions } X : t \mapsto e^{tJ_\lambda}X_0 \text{ avec } X_0 \in E}$

II.5) Si $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et comme $\lambda > 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda t} = +\infty$ alors X n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Si } \lambda > 0 \text{ alors } (S) \text{ admet une solution non bornée sur } \mathbb{R}^+.}$

II.6) • Posons $Z = AX = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$

Alors $||Z||^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} |z_i|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} \left| \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right|^2$

Mais $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j =< L_j^T, X >$ avec L_j la j-ième ligne de A.

Donc par Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel :

$\left| < L_j^T, X > \right| \leq ||L_j|| \, . \, ||X|| \Rightarrow \left| \sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right|^2 \leq [\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2] \, ||X||^2$

On a donc : $||AX||^2 = ||Z||^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2] \, ||X||^2 \leq N(A)^2 \, ||X||^2$

En prenant la racine on a : $\boxed{\forall A \in M_p(\mathbb{R}) \ , \ \forall X \in E \ , \ ||AX|| \leq N(A) \, ||X||}$

• On suppose $\lambda < 0$.

Soit $Y(t) = exp(tJ_\lambda) X_0$ une solution de (S).

Alors $N(exp(tJ_\lambda)) = N(e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k)$ Mais $e^{\lambda t} > 0$ donc $N(exp(tJ_\lambda)) = e^{\lambda t} N(\sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k)$

On utilise maintenant l'inégalité triangulaire :

$N(exp(tJ_\lambda)) \leq e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} N(\frac{t^k}{k!} J_0^k)$ On travail avec $t > 0$ puisque l'on va faire $t \to +\infty$:

$N(exp(tJ_\lambda)) \leq e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k)$

Comme J_0^k ne contient que des 1, alors $N(J_0^k) = \sqrt{\text{nb de 1 de } J_0^k}$.

Comme il y a au plus p coefficients 1 (dans le cas $k = 0$) alors $N(J_0^k) \leq \sqrt{p}$

On a donc : $N(exp(tJ_\lambda) \leq e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} \sqrt{p}$

Avec II.5° $Y(t) = exp(tJ_\lambda) X_0 \Rightarrow ||Y|| \leq N(exp(tJ_\lambda)) \, ||X_0|| \leq [e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!}] \sqrt{p}$

Mais, comme $\lambda < 0$, $[e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!}] \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison exponentielle puissance et donc Y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Si } \lambda < 0 \text{ alors les solutions de } (S) \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^+.}$

II.7) Si $\lambda = 0$ alors X solution de $(S) \Rightarrow \begin{cases} x_1'(t) = 0 \\ x_2'(t) = x_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = a \\ x_2'(t) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = a \\ x_2'(t) = at + b \end{cases}$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Si on regarde chaque coordonnée on a que x_k est un polynôme de degré $k - 1$.

La seule possibilités pour que X soit bornée (sur $\mathbb{R}^+$ ou même sur $\mathbb{R}$) est que $\boxed{X \text{ soit constante.}}$