Lundi 17 février 2025

PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°6

SUJET format 1 : ccINP

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE

RAPPEL DES CONSIGNES

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

EXERCICE

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

1. **Etude de la convergence de la série de terme général** u_n
   (a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0. (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée)
   (c) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

2. **Calcul de la somme de cette série**
   (a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.
   (b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$
   (c) **Intégration terme à terme ?**
      i. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.
      ii. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$.
      iii. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*
   (d) On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.
   En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

PROBLEME 1 : Série de Piles ou Face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].
On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \cdots .$

Exemple 2 : $\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{Série n° 3}} .$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :
- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q1) Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k\geq 0} x^k \,.$$

Q2) En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{k\geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Q3) Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

Q4) Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.

Q5) En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.

Q6) Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4\,.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

Q7) Déterminer les lois de N_1 et N_2.

Q8) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

Q9) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\,,$$

puis en déduire que :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap P_n\right)\,.$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k) \cap F_n\right) ,$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap P_n\right) ,$$

$$P\left((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left((N_n = k-1) \cap F_n\right) .$$

Q10) En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1) .$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P(N_m = k) x^k .$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x .$$

Q11) Déduire de Q10) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x) .$$

Q12) Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Q13) Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

Q14) Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

PROBLEME 2 : Matrices symétriques positives

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul. On rappelle que la norme euclidienne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est définie par $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en particulier $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top X \geqslant 0$.
Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice réelle symétrique. On dit que A est positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A X \geqslant 0$.

II.A –

Q 13. Montrer que si $(\lambda, \mu) \in {\mathbb{R}^+}^2$ et si A et B sont des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\lambda A + \mu B$ est une matrice symétrique positive.

Q 14. Montrer que si A est une matrice symétrique positive, alors $A^\top$ l'est aussi.

II.B – On considère une matrice symétrique positive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 15. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) P^\top$$

Q 16. On considère $i \in \{1, ..., n\}$ et un vecteur propre $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de A associé à λ_i. Montrer que

$$\lambda_i \|X_i\|^2 = X_i^\top A X_i$$

Q 17. En déduire que les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A sont toutes positives.

Q 18. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $a + c \geqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$.

II.C – Réciproquement, on considère une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives. Il existe alors une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et des réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) P^\top$$

Q 19. On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X' = P^\top X$. On note $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, montrer que

$$X^\top A X = X'^\top \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) X' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x'_i}^2$$

Q 20. En déduire que A est une matrice symétrique positive.

Q 21. Montrer que si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors A est symétrique positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

II.D – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$. Montrer que A est symétrique positive.

Q 23. Réciproquement, on suppose que A est une matrice symétrique positive. En utilisant la sous-partie II.B, montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^\top B$.