**Lundi 17 février 2025**

# PSI* 2024-2025, Devoir surveillé de Mathématiques n°5

## SUJET format 2 : Mines-Ponts

*La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, l'orthographe entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*
*Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les changements que cette erreur implique.*

**LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE**

---

**RAPPEL DES CONSIGNES**

• Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
• Ne pas utiliser de correcteur.
• Respecter impérativement l'ordre des questions.
• Écrire le mot FIN à la fin de votre composition
• Conclure chaque question, utiliser une argumentation précise, encadrer les résultats.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

---

# EXERCICE : Calcul de l'intégrale de Dirichlet par le biais d'une intégrale à paramètre

On pose $I = ]0,+\infty[$ et $A = [0,+\infty[$.

On pose : $\begin{array}{cccc} f & : & A\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & exp(-xt)\frac{sin(t)}{t} \end{array}$

Q1) Montrer que $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$ est convergente.

Q2) Montrer que : $\forall x > 0$ , $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $I$.

On peut donc définir : $F : x \mapsto \int\limits_0^{+\infty} f(x,t)d$ sur $A$.

Q3) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

Q4) Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $I$ et en déduire que : $\forall x > 0\ ,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - arctan(x)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x > 0\ ,\ F_n(x) = \int\limits_0^n f(x,t)dt$

Q5) Montrer que les fonctions $F_n$ sont continues sur $A$.

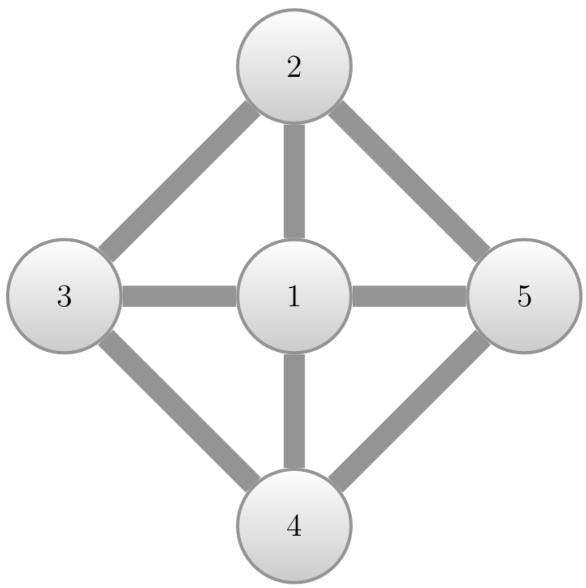
Q6) Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $F$ sur $A$.

Q7) Montrer que $F$ est continue sur $A$.

Q8) Calculer $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$

# PROBLEME : Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :




Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant $k$ ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro $i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle $i$ et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle $i$. On admet que l'on peut introduire, pour tout $k$ entier naturel, une variable aléatoire $S_k$ donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant $k$. À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}).$$

Pour une matrice $B$, $B^T$ représente sa matrice transposée.

# I Premiers pas

Q1) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbb{P}(S_k = i),\ i = 1, \dots, 5)$.

Q2) Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout $k$ entier naturel.

Q3) En observant les colonnes de la matrice $B$, montrer que le réel 1 est valeur propre de $B^T$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable $S_0$ est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Q4) Montrer qu'alors les variables aléatoires $S_k$ ont toutes la même loi.

Q5) Est-ce que $S_0$ et $S_1$ sont indépendantes ?

# II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur $E$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour tout entier naturel $k$ non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où $I_E$ représente l'endomorphisme identité de $E$.

Q6) Soit $x \in \ker(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.

Q7) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

Q8) En déduire que $E = \ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.

Q9) Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de $E$, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où $I_n$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q10) Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $P$, telle que $P^2 = P$.

# III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

**Définition 1** *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

**Définition 2** *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

*Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients $\lambda_i$ sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.*

Q11) Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

Q12) En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre $n$) est stable pour le produit matriciel.

Q13) Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Q14) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que la matrice $A^p$ ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

Q15) Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
*Indication : soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.*

Q16) En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

Q17) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice $R_k$ est stochastique.

Q18) Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $P$, stochastique, de rang 1.

Q19) En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

Q20) Montrer que $PA = P$. En déduire que $L$ est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

Q21) Montrer que les coefficients de la matrice ligne $L$ sont tous strictement positifs.

Q22) Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de $A$. *On pourra utiliser le résultat de la question Q8).*

# IV Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = B^T$ où $B$ est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice $A^2$ sont tous strictement positifs.

Q23) Expliciter la limite $P$ de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie en (2).

Q24) Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1,5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire $S_0$ suit cette loi, alors les variables $S_k$ suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants $k$, $k \in \mathbb{N}$).

*** FIN ***